Rud. Neumann

Diss. Breslau

1912.

Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen auf Grund der Theorie der Integralgleichungen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Rudolf Neumann

Sonnabend, den 20. Januar 1912, mittags $12^1/_2$ Uhr

im Musiksaale der Universität:

Vortrag

über

„Die geschichtliche Entwicklung des Problems, willkürliche Funktionen durch Systeme gegebener darzustellen"

und

Promotion.

ACAD. LAND. BAT. BIBL.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1912

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referent: Geh.-Rat Professor Dr. **Kneser**.

Tag der mündlichen Prüfung: 1. III. 1911.

Dem Andenken meines Vaters

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548201_0178

Einleitung.

Gewisse Klassen von Polynomen lassen sich dazu verwenden, willkürliche Funktionen in unendlich ausgedehnten Intervallen in Reihen zu entwickeln, welche nach der Fourierschen Weise gebildet sind. Zu diesen Polynomen gehören die von Hermite[1]) definierten Polynome $P_n(x)$, welche die Differentialgleichung

$$y'' - axy' + any = 0 \qquad (a > 0)$$

befriedigen, und die von Laguerre[2]) definierten Polynome $Q_n(x)$, welche Lösungen der Differentialgleichung

$$xy'' + (1 + x)\, y' - ny = 0$$

sind, wo in beiden Fällen n die Werte 0,1,2, ... annimmt.

Die Funktionen $e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$ sind orthogonal in einem nach beiden Seiten hin unbegrenzten Intervalle $(-\infty, +\infty)$, d. h. es besteht zwischen je zweien von ihnen eine Relation von der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x) . e^{-\frac{x^2}{2}} P_{n_1}(x) dx = 0 \qquad (n \gtrless n_1);$$

sie werden daher auch als Hermitesche Orthogonalfunktionen bezeichnet. Die Funktionen $e^{\frac{x}{2}} Q_n(x)$ dagegen sind orthogonal in einem nur nach einer Seite hin unbegrenzten Inter-

[1]) Comptes rendus, T. LVIII, 1864, p. 93, 266.

[2]) Oeuvres, T. I, p. 428.

valle $(-\infty, 0)$: zwischen irgend zweien von ihnen besteht eine Gleichung von der Form

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{2}} Q_n(x) \cdot e^{\frac{x}{2}} Q_n(x) dx = 0 \qquad (n \gtrless n_1);$$

sie werden Laguerresche Orthogonalfunktionen genannt. Wegen der Orthogonalität eignen sich die ersteren zur Darstellung willkürlicher Funktionen im Intervalle $-\infty, +\infty$, die letzteren zur Darstellung willkürlicher Funktionen im Intervalle $-\infty, 0$.

Die Frage nach der Möglichkeit solcher Entwicklungen haben schon H. Kiehl, W. Lebedeff, W. Stekloff und H. Weyl bis zu einem gewissen Grade beantwortet.

H. Kiehl[1]) summiert die Reihe

$$\sum_n A_n U_n^{(x)} = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \sum_n \frac{U_n^{(x)}}{a_n \cdot n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2} z^2} U_n^{(z)} f(z) dz,$$

wo die $U_n^{(x)}$ die Hermiteschen Polynome bedeuten, indem er mit Hilfe von Integraldarstellungen der Polynome, die er ableitet, den Summenwert der Reihe auf die Form eines Dirichletschen Integrals bringt. Er erhält den Entwicklungssatz[2]):

Wenn eine Funktion $f(z)$ für jeden reellen endlichen Wert von z endlich ist, für $z = \infty$ aber entweder endlich ist oder so über alle Grenzen wächst, dass die Grösse

$$\left(e^{-\frac{a}{2}(z-x)^2} f(z) \right)_{z=\infty} = 0$$

ist, wo x irgend einen reellen endlichen Wert bedeutet: dann kann die Funktion $f(z)$ in eine für jedes endliche x konvergente Reihe $U(x)$ entwickelt werden:

$$f(z) = A_0 U_0^{(z)} + A_1 U_1^{(z)} + \ldots.$$

---

[1]) Henricus Kiehl, De functionibus Hermitianis. Dissertation, Greifswald 1866. Caput III, § 3.

[2]) l. c., p. 42.

wo $$A_n = \frac{1}{a^n . n!} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2} z^2} U_n^{(a)} f(z) dz.$$

Wenn $f(z)$ bei $z = \alpha$ einen Sprung macht, ohne aber aufzuhören endlich zu sein, so hat die Reihe $U(z) = \Sigma A_n U_n^{(a)}$ für $z = \alpha$ den Wert $\frac{f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)}{2}$.

W. Lebedeff[1]) stellt die Funktionen $e^{-\frac{x^2}{2}} . P_n(x)$, wo die $P_n(x)$ die Hermiteschen Polynome für den Fall $a = 2$ sind, und die Funktionen $e^{\frac{x}{2}} . Q_n(x)$ nach einer von Appell angegebenen Methode als Eigenfunktionen von homogenen linearen Integralgleichungen mit Kernen dar, die auch in der ersten Ableitung stetig sind, und wendet auf diese die von Erhard Schmidt durchgeführte Theorie der homogenen linearen Integralgleichungen an. Sie gewinnt folgende Entwicklungssätze[2]):

Jede im Gebiete $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ samt ihren zwei ersten Ableitungen endliche und stetige Funktion $g(x)$, welche für $x = \pm\infty$ von höherer als 3. Ordnung verschwindet, kann in diesem Gebiete in die in Fourierscher Weise gebildete Reihe

$$g(x) = \Sigma a_n e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$$

entwickelt werden. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmässig.

Jede samt ihren zwei ersten Ableitungen im Gebiete $-\infty \leqq s \leqq 0$ endliche und stetige Funktion $g(s)$, welche für $s = -\infty$ von höherer als 2. Ordnung verschwindet, lässt sich in diesem Gebiete in die Reihe von der Form

$$g(s) = \sum_1^\infty a_n e^{\frac{s}{2}} . Q_n(s)$$

---

[1]) Wera Lebedeff, Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen. Dissertation, Göttingen 1906.

[2]) l. c., 2. Kapitel § 7. 3. Kapitel § 14.

entwickeln. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmässig.

W. Stekloff[1]) wendet die von Dirichlet für die Summation der trigonometrischen Reihen entwickelte Methode auf die nach Fourierscher Weise gebildete Entwicklungsreihe einer willkürlichen Funktion $\varphi(x)$ nach den Hermiteschen Polynomen an. Er summiert die endliche Summe $\sum_{k}^{1,n} \frac{P_k(x)P_k(\alpha)}{I_k}$, wo $I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P^2_k(x)dx$ ist, mit Hilfe einer Rekursionsformel der Hermiteschen Polynome, führt dann asymptotische Ausdrücke für dieselben ein und stellt so die Summe der ersten n-Glieder der Entwicklungsreihe als ein Dirichletsches Integral dar, dessen Grenzwert für $n = \infty$ gleich dem Summenwert der unendlichen Reihe ist. Er erhält das Resultat[2]):

Die Reihe

$$\sum_{n}^{0,\infty} \frac{P_n(x)}{I_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \varphi(\alpha) P_n(\alpha) d\alpha$$

konvergiert für jeden Wert von x, wenn die Funktion $\varphi(x)$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, und die Summe dieser Reihe ist gleich

$$\frac{1}{2}\,[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)].$$

Nach diesem Satze wird also für die Funktion $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi(x)$ die Gleichung bestehen:

---

[1]) W. Stekloff, Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonctions arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions. Communications de la soc. math. de Charkow, 1907.

[2]) l. c., §§ 19 und 20.

$$\sum_{n}^{0,\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)}{I_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} P_n(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\,[\psi(x+0) + \psi(x-0)],$$

wenn $\psi(x)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, die im Unendlichen mindestens wie $e^{-\frac{x^2}{2}}$ verschwindet.

Dieses Stekloffsche Resultat lässt sich noch dahin verbessern, dass $\psi(x)$ im Unendlichen nur so stark zu verschwinden braucht, dass die Funktion $x^4 \cdot \psi(x)$ bis ins Unendliche integrabel ist.

H. Weyl[1]) gewinnt seine Entwicklungssätze, indem er von der Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variablen ausgeht. Dieselben lauten[2]):

„Eine einmal stetig differenzierbare Funktion $f(s)$ ist nach den Hermiteschen Orthogonalfunktionen $e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot P_p(s)$ sicher dann entwickelbar, wenn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (s \cdot f(s))^2 ds, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f'(s))^2 ds$$

existieren."

Die Polynome $P_p(s)$ sind bestimmt durch die Gleichung:

$$P_p(s) = (-1)^p\, e^{\frac{s^2}{2}} \frac{d^p}{ds^p}\left(e^{-\frac{s^2}{2}}\right).$$

Ferner: „Jede zweimal stetig differenzierbare Funktion, die samt ihren beiden ersten Derivierten im Unendlichen von höherer als 2. Ordnung verschwindet, kann nach den Laguerreschen Orthogonalfunktionen entwickelt werden".

Es erhebt sich nun die Frage, ob sich nicht auch mit Hilfe der Schmidtschen Theorie der Integralgleichungen allgemeinere Resultate erhalten lassen, als sie W. Lebedeff

[1]) H. Weyl, Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems. Dissertation, Göttingen, 1908.

[2]) l. c., III. Teil, §§ 11 und 12.

erhalten hat; ob sich nicht durch Bildung eines Kernes mit unstetiger Ableitung Sätze über die Entwicklung solcher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen herleiten lassen, bei denen beispielsweise, wie in der Theorie der Fourierschen Reihen, Unstetigkeiten der Funktion selbst, wie auch der Ableitungen zugelassen werden können.

Wir wollen nach der von Kneser eingeführten Bezeichnung unter „Grundgebiet“ das Intervall verstehen, auf welches sich unsere Betrachtung erstreckt.

Bezüglich der Hermiteschen Polynome wollen wir uns auf den einfachsten Fall $a = 2$ beschränken.

Die Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen lassen sich dann als Lösungen von Randwertproblemen mit unendlichem Grundgebiete darstellen. Diese Randwertprobleme sind von demselben Typus, den Kneser im 63. Bande der Mathematischen Annalen in der Abhandlung: „Integralgleichungen und Darstellung willkürlicher Funktionen“ untersucht hat für den Fall, dass ein endliches Grundgebiet vorliegt. Die in dieser Abhandlung angestellten Untersuchungen lassen sich aber unter gewissen naheliegenden Einschränkungen auf ein unendliches Grundgebiet ausdehnen, vorausgesetzt, dass die dabei benutzten Sätze aus der Theorie der Integralgleichungen für dieses ihre Giltigkeit behalten. Dieselben sind nämlich zunächst nur für solche Integralgleichungen bewiesen, deren Integrationsintervall a, b endlich ist. Der Erweiterung ihrer Beweise auf Integralgleichungen mit unendlichem Intervalle stellen sich gewisse Schwierigkeiten entgegen; insbesondere ist es fraglich, ob sich in den auftretenden Doppelintegralen mit unendlichem Integrationsintervalle die Reihenfolge der Integration umkehren lässt und ob man eine gleichmässig konvergente Reihe auch in einem unendlichen Intervalle gliedweise integrieren kann.

Diese Schwierigkeiten werden in der Dissertation von W. Lebedeff, wie es scheint, nicht hinreichend berücksichtigt. Es wird allerdings gesagt[1]), dass „die Hilbertschen Ent-

[1]) l. c., 2. Kapitel, § 5.

wicklungssätze sich trotz des unendlichen Intervalles anwenden lassen", jedoch fehlt jegliche Erörterung der im Vorangehenden erhobenen Bedenken für die Richtigkeit dieser Behauptung.

In dem I. Kapitel der vorliegenden Arbeit, dem die Theorie der Integralgleichungen in der Fassung, die ihr Erhard Schmidt[1]) gegeben hat, zu Grunde gelegt wird, soll nun gezeigt werden, dass unter gewissen einfachen Voraussetzungen über die Eigenfunktionen und den Kern der Integralgleichung die Schmidtschen Sätze über homogene lineare Integralgleichungen auch für solche mit unendlichem Integrationsintervalle ihre Giltigkeit behalten.

Im II. Kapitel soll dann festgestellt werden, unter welchen Einschränkungen sich die von Kneser in der oben zitierten Abhandlung angestellten Betrachtungen auf ein unendliches Grundgebiet ausdehnen lassen.

Im III. Kapitel sollen schliesslich die allgemeinen Untersuchungen des I. und II. Kapitels auf die Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen angewandt werden.

Wir gelangen so zu Resultaten, welche allgemeinere Funktionen zu entwickeln gestatten, als die Sätze von Lebedeff, Weyl und der Satz von Stekloff, auch in der verbesserten Form.

I. Kapitel.

Die allgemeine Theorie der homogenen linearen Integralgleichung mit unendlichem Integrationsintervall.

Unter welchen Bedingungen lassen sich die von Schmidt für seine Sätze über homogene lineare Integralgleichungen angegebenen Beweise auf Integralgleichungen ausdehnen, deren Integrationsintervall oder Grundgebiet unendlich gross ist? Dies ist die Frage, die wir in diesem I. Kapitel zu beantworten haben.

---

[1]) Erhard Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Dissertation, Göttingen 1905.

Wir schicken folgende Hilfssätze voraus:

I. Es ist

$$\int_b^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_b^\infty f(x,y)dy,$$

wenn 1) für alle Werte von y im Intervalle b, ∞ und für alle Werte von A im Intervalle a, ∞ das Integral $\int_A^\infty f(x,y)dx$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $\varepsilon_A \cdot \psi(y)$ ist, wo ε_A immer endlich bleibt und mit unbegrenzt wachsendem A gegen Null konvergiert, und wo $\psi(y)$ eine positive, von b bis ∞ integrable Funktion von y ist: und wenn 2) für alle Werte von x im Intervalle a, ∞ und für alle Werte von B im Intervalle b, ∞ das Integral $\int_B^\infty f(x,y)dy$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $\varepsilon_B \cdot \varphi(x)$ ist, wo ε_B immer endlich bleibt und mit unbegrenzt wachsendem B gegen Null konvergiert, und wo $\varphi(x)$ eine positive, von a bis A integrable Funktion von x ist.

Beweis s. Jordan, Cours d'analyse, II, § 72.

II. Eine unendliche Reihe $\sum_n^{0,\infty} u_n(x)$ kann in einem unendlichen Intervalle a, $+\infty$ gliedweise integriert werden, wenn sie in jedem beliebig grossen, aber endlichen Intervalle gleichmässig konvergiert, wenn die Reihe der Integralreste, d. h. die Grösse $\sum_n^{0,\infty} \int_g^\infty u_n(x)dx$ bei unbegrenzt wachsendem g gegen Null konvergiert, und wenn die Reihe der Integrale, d. h. die Reihe $\sum_n^{0,\infty} \int_a^\infty u_n(x)dx$, konvergent ist.

Beweis: Es gilt die Gleichung

$$\sum_{n}^{0,\infty} \int_{a}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n}^{0,\infty} \int_{a}^{g} u_n(x)dx + \sum_{n}^{0,\infty} \int_{g}^{\infty} u_n(x)dx,$$

deren linke Seite nach Voraussetzung einen bestimmten endlichen Wert besitzt, oder nach der Regel, dass man eine gleichmässig konvergente Reihe in einem endlichen Intervalle gliedweise integrieren kann:

$$\sum_{n}^{0,\infty} \int_{a}^{\infty} u_n(x)dx = \int_{a}^{g} \left(\sum_{n}^{0,\infty} u_n(x) \right) dx + \sum_{n}^{0,\infty} \int_{g}^{\infty} u_n(x)dx.$$

Der letzte Summand konvergiert bei ungrenzt wachsendem g gegen Null; das heisst: wenn eine beliebig kleine positive Zahl ε gegeben ist, so lässt sich immer bewirken, dass die Ungleichung besteht: $\left| \sum_{n}^{0,\infty} \int_{g}^{\infty} u_n(x)dx \right| < \varepsilon$, wenn g nur hinreichend gross genommen wird. Daher ist die letzte Gleichung gleichbedeutend mit den folgenden:

$$\sum_{n}^{0,\infty} \int_{a}^{\infty} u_n(x)dx = \lim_{g=\infty} \int_{a}^{g} \left(\sum_{n}^{0,\infty} u_n(x) \right) dx$$

$$= \int_{a}^{\infty} \left(\sum_{n}^{0,\infty} u_n(x) \right) dx, \text{ w. z. b. w.}$$

III. Es besteht die Ungleichung

$$\left(\sum_{n}^{0,\infty} u_n v_n \right)^2 \leqq \sum_{n}^{0,\infty} u_n{}^2 \cdot \sum_{n}^{0,\infty} v_n{}^2,$$

wenn die Reihen $\sum_{n}^{0,\infty} u_n{}^2$ und $\sum_{n}^{0,\infty} v_n{}^2$ konvergieren.

Beweis: Es ist

$$\left(\sum_{n}^{0,N} |u_n v_n|\right)^2 = \sum_{n}^{0,N} u_n^2 v_n^2 + 2 \sum_{n}^{0,N} \sum_{m}^{n+1,N} |u_n v_n u_m v_m|$$

$$\leqq \sum_{n}^{0,N} u_n^2 v_n^2 + \sum_{n}^{0,N} \sum_{m}^{n+1,N} (u_n^2 v_m^2 + u_m^2 v_n^2)$$

$$= \sum_{n}^{0,N} u_n^2 v_n^2 + \sum_{n}^{0,N} \left(u_n^2 \sum_{m}^{n+1,N} v_m^2\right)$$

$$+ \sum_{n}^{0,N} \left(v_n^2 \sum_{m}^{n+1,N} u_m^2\right).$$

Nun ist aber

$$\sum_{n}^{0,N} u_n^2 v_n^2 + \sum_{n}^{0,N} \left(v_n^2 \sum_{m}^{n+1,N} u_m^2\right) = \sum_{n}^{0,N} \left(v_n^2 \sum_{m}^{n,N} u_m^2\right)$$

$$= \sum_{m}^{0,N} \left(u_m^2 \sum_{n}^{0,m} v_n^2\right)$$

$$= \sum_{n}^{0,N} \left(u_n^2 \sum_{m}^{0,n} v_m^2\right).$$

Daher bekommen wir die Ungleichung

$$\left(\sum_{n}^{0,N} |u_n v_n|\right)^2 \leqq \sum_{n}^{0,N} \left(u_n^2 \sum_{m}^{0,n} v_m^2\right) + \sum_{n}^{0,N} \left(u_n^2 \sum_{m}^{n+1,N} v_m^2\right)$$

$$= \sum_{n}^{0,N} \left(u_n^2 \sum_{m}^{0,N} v_m^2\right)$$

$$= \sum_{n}^{0,N} u_n^2 \cdot \sum_{m}^{0,N} v_m^2$$

$$= \sum_n^{0,N} u_n^2 \cdot \sum_n^{0,N} v_n^2$$

$$\leqq \sum_n^{0,\infty} u_n^2 \cdot \sum_n^{0,\infty} v_n^2 .$$

Diese Ungleichung gilt für alle Werte von N. Folglich muss, da auf der rechten Seite eine von N unabhängige, endliche Konstante steht, auch

$$\left(\sum_n^{0,\infty} |u_n v_n|\right)^2 \leqq \sum_n^{0,\infty} u_n^2 \cdot \sum_n^{0,\infty} v_n^2$$

und umso mehr

$$\left(\sum_n^{0,\infty} u_n v_n\right)^2 \leqq \sum_n^{0,\infty} u_n^2 \cdot \sum_n^{0,\infty} v_n^2$$

sein, w. z. b. w.

Jetzt gehen wir an die Untersuchung der Schmidtschen Beweise. Wir halten uns dabei genau an den Gang der Dissertation von Schmidt und prüfen in den einzelnen Paragraphen dieses Kapitels die Richtigkeit der in den gleichnummerierten Paragraphen der Schmidtschen Dissertation enthaltenen Beweise für den Fall, dass das Integrationsintervall und Grundgebiet die Grenzen a und $b = +\infty$ besitzt. Wo es notwendig ist, führen wir schärfere Voraussetzungen ein.

§§ 1 und 2. Die Beweise und Sätze dieser Paragraphen lassen sich, mit Ausnahme des Zusatzes von § 2, ohne weiteres auf unendliches Intervall $a, +\infty$ übertragen, wenn die Integrale $\int_a^\infty f^2(x)dx$ und $\int_a^\infty \varphi^2(x)dx$ existieren.

Bei der Schwarzschen Ungleichung ist der Beweis dafür folgendermassen zu führen:

Die Schwarzsche Ungleichung ist zunächst für endliche Intervalle bewiesen; daher ist für jedes positive g

$$\int_a^g |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqq \left(\int_a^g f^2(x)\,dx \cdot \int_a^g \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn nun die Integrale $\int_a^\infty f^2(x)\,dx$ und $\int_a^\infty \varphi^2(x)\,dx$ existieren, so können wir auf der rechten Seite g durch ∞ ersetzen:

$$\int_a^g |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqq \left(\int_a^\infty f^2(x)\,dx \cdot \int_a^\infty \varphi^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Jetzt steht rechts eine endliche und von g unabhängige Grösse; lassen wir auch links g unbegrenzt wachsen, so kann, da der Integrand der linken Seite positiv ist, die Ungleichung nicht aufhören, richtig zu sein. Wir gelangen so zu dem Ergebnis:

$$\int_a^\infty |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqq \left(\int_a^\infty f^2(x)\,dx \cdot \int_a^\infty \varphi^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt die andere:

$$\left|\int_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqq \left(\int_a^\infty f^2(x)\,dx \cdot \int_a^\infty \varphi^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dies ist die Schwarzsche Ungleichung für unendlich grosses Integrationsintervall.

Wir fügen noch folgende Bemerkung hinzu:

Da ein bis ins Unendliche erstrecktes Integral mit positivem Integranden entweder einen bestimmten endlichen Wert oder den Wert $+\infty$ hat, so zeigt die vorletzte Ungleichung die Existenz des Integrals $\int_a^\infty |f(x)\varphi(x)|\,dx$ an. Da ferner ein Integral mit unendlich grossem Integrationsinter-

valle sicher dann konvergiert, wenn es absolut konvergiert, so muss auch das Integral $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)dx$ existieren.

In allen Fällen, wo wir von der Schwarzschen Ungleichung Gebrauch machen werden, wird die obige Bedingung der Existenz der Integrale $\int_a^\infty f^2(x)dx$ und $\int_a^\infty \varphi^2(x)dx$ erfüllt sein, welche uns die Anwendung dieser Ungleichung bei unendlich grossem Intervalle der Integration gestattet. Um Wiederholungen zu vermeiden, werden wir dies in den einzelnen Fällen nicht immer erst besonders hervorheben.

§ 3. Es muss hier die neue Voraussetzung (A) eingeführt werden, dass das Integral $\int_a^\infty \varphi_\nu^2(z)dz$ für jedes ν einen bestimmten Wert hat, der entweder eine Konstante oder von ν abhängig ist. Dann gilt dasselbe nach der in § 1 bewiesenen Schwarzschen Ungleichung auch von den von Schmidt eingeführten Integralen $\int_a^\infty \varphi_n(z)\psi_\rho(z)dz$.

Nur unter der soeben eingeführten Voraussetzung ist es möglich, ein normiertes Orthogonalsystem aus linear unabhängigen Funktionen herzustellen.

§ 4. Wir machen die neu hinzutretende Annahme (B), dass für alle Werte von s im Grundgebiete das Integral $\int_a^\infty [K(s,t)]^2dt$ bestimmte Werte besitzen möge, die alle unter einer endlichen Konstanten A liegen, und dass das Doppelintegral $\int_a^\infty\int_a^\infty [K(s,t)]^2ds\,dt$ gleich einer endlichen Konstanten C sei.

Unter dieser Annahme lässt sich folgender Hilfssatz beweisen, den wir später noch wiederholt werden anzuwenden haben

IV. Es seien $k(s)$ und $l(s)$ zwei im Grundgebiete definierte stetige Funktionen von s. Wenn dann die Integrale $\int_a^\infty k^2(s)ds$ und $\int_a^\infty l^2(s)ds$ existieren, so besteht die Gleichung

$$\int_a^\infty k(s)ds \int_a^\infty K(s,t)l(t)dt = \int_a^\infty k(t)dt \int_a^\infty K(s,t)l(s)ds.$$

Beweis: Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt für jedes $A > a$:

$$\left|\int_A^\infty K(s,t)k(s)l(t)\,ds\right| \leqq |l(t)| \cdot \left(\int_A^\infty [K(s,t)]^2 ds \cdot \int_A^\infty k^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \left(\int_A^\infty k^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |l(t)| \cdot \left(\int_a^\infty [K(s,t)]^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

Da das Integral $\int_a^\infty k^2(s)ds$ existiert, so kann $\int_A^\infty k^2(s)ds = \varepsilon_A$ gesetzt werden, wobei ε_A immer endlich bleibt und bei unbegrenzt wachsendem A gegen Null konvergiert. Wir können also schreiben:

$$\left|\int_A^\infty K(s,t)k(s)l(t)\,ds\right| \leqq \varepsilon_A \cdot |l(t)| \left(\int_a^\infty [K(s,t)]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

Die Funktion $|l(t)| \left(\int_a^\infty [K(s,t)]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$ ist positiv und, nach der Bemerkung zur Schwarzschen Ungleichung in § 1, von a bis $+\infty$ integrabel, weil sich das Quadrat der Funktionen $|l(t)|$ und $\left(\int_a^\infty [K(s,t)]^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$ von a bis $+\infty$ integrieren lässt.

Wir sehen daher, dass der ersten Voraussetzung des Hilfssatzes I Genüge getan wird, wenn wir setzen

$$s = x,\ t = y,\ K(s,t)k(s)l(t) = f(x,y),\ |\ l(t)\ |\ \left(\int_a^\infty [K(s,t)]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} = \psi(y)$$

Ebenso zeigt man, dass auch die zweite Voraussetzung des Hilfssatzes I zutrifft.

Mithin besteht nach I die Gleichung

$$\int_a^\infty k(s)ds \int_a^\infty K(s,t)l(t)\,dt = \int_a^\infty l(t)dt \int_a^\infty K(s,t)k(s)ds,$$

wie wir behauptet hatten.

Aus der Integralgleichung

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^\infty K(s,t)\varphi_\nu(t)dt$$

lässt sich jetzt die Orthogonalität der Eigentunktionen $\varphi_\nu(s)$ unmittelbar herleiten.

Es seien nämlich μ und ν zwei von einander verschiedene Werte des Index; so ist

$$\int_a^\infty \varphi_\mu(s)\varphi_\nu(s)ds = \lambda_\mu \int_a^\infty \varphi_\mu(s)ds \int_a^\infty K(s,t)\varphi_\nu(t)dt$$

$$\int_a^\infty \varphi_\nu(s)\varphi_\mu(s)\,ds = \lambda_\nu \int_a^\infty \varphi_\nu(s)ds \int_a^\infty K(s,t)\varphi_\mu(t)dt$$

In jedem dieser Integrale lässt sich nach Satz IV die Integrationsfolge umkehren, weil die Integrale $\int_a^\infty \varphi_\mu^2(s)ds$ und $\int_a^\infty \varphi_\nu^2(s)ds$ den Wert 1 haben. Daher sind die beiden Doppelintegrale einander gleich, folglich, wegen $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$,

$$\int_a^\infty \varphi_\nu(s)\varphi_\mu(s)ds = 0.$$

§ 5. Mit Hilfe der schon eingeführten Annahmen lässt sich die Giltigkeit der bewiesenen Sätze ohne Schwierigkeit auf das unendliche Grundgebiet erweitern.

§ 6. Auch die Sätze dieses Paragraphen bleiben bei unendlichem Intervalle bestehen. Wir haben nur zu zeigen, dass die iterierten Kerne überhaupt existieren: es ist

$$K^n(s,t) = \int_a^\infty K(s,r)K^{n-1}(r,t)dr, \qquad \text{folglich}$$

$$[K^n(s,t)]^2 \leqq \int_a^\infty [K(s,r)]^2 dr \cdot \int_a^\infty [K^{n-1}(t,r)]^2 dr$$

$$< A \cdot \int_a^\infty [K^{n-1}(t,r)]^2 dr,$$

vorausgesetzt, dass das Integral $\int_a^\infty [K^{n-1}(t,r)]^2\, dr$ überhaupt existiert.

Nun bestehen aber die folgenden Ungleichungen:

$$\int_a^\infty [K^n(t,r)]^2 dr \leqq C \int_a^\infty [K^{n-1}(t,\alpha)]^2\, d\alpha$$

$$\leqq C^\nu \int_a^\infty [K^{n-\nu}(t,\alpha)]^2\, d\alpha$$

$$\leqq C^{n-1} \int_a^\infty [K(t,\alpha)]^2 d\alpha,$$

weil das letzte Integral für alle Werte von t im Grundgebiete bestimmte Werte besitzt. Daraus folgt nach der Bemerkung zur Schwarzschen Ungleichung, § 1, dass in der Tat alle Integrale $\int_a^\infty [K^n(t,r)]^2 dr$ endliche und bestimmte Werte haben und mithin auch $K^n(s,t)$.

Damit ist die Existenz der iterierten Kerne bewiesen.

Schmidt zeigt in diesem Paragraphen 6 noch, dass bei endlichem Integrationsintervalle der Integralgleichung für jedes n der Satz besteht: Wenn $K^n(s,t)$ eine Eigenfunktion besitzt, so besitzt auch $K(s,t)$ eine solche. Dieser Satz wird nachher, beim Beweise des Fundamentalsatzes (§ 11), in der speziellen Fassung für $n = 2$ gebraucht: Wenn $K^2(s,t)$ eine Eigenfunktion besitzt, so besitzt auch $K(s,t)$ eine solche. In dieser Fassung lässt sich der Satz nach der von Schmidt angegebenen Methode auch bei unendlichem Intervalle der Integralgleichung beweisen:

Es sei $\psi(s)$ eine Eigenfunktion von $K^2(s,t)$:

$$\psi(s) = c \int_a^\infty K^2(s,t)\psi(t)dt \,.$$

Dann setze man

$$\psi_\nu(s) = \frac{1}{2}\psi(s) + \frac{h_\nu}{2}\int_a^\infty K(s,t)\psi(t)dt.$$

Das Integral hat einen endlichen und bestimmten Wert. Dies folgt nach § 1 daraus, dass die Integrale $\int_a^\infty [K(s,t)]^2\,dt$ und, wie in § 11 bewiesen werden wird, $\int_a^\infty \psi^2(t)dt$ endliche und bestimmte Werte besitzen, und zwar das erste für alle Werte von s im Grundgebiete.

Jetzt kann man ebenso wie Schmidt nachweisen, dass die Gleichung besteht:

$$\chi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_a^\infty K(s,t)\chi_\nu(t)dt,$$

d. h. dass $\chi_\nu(s)$ Eigenfunktion von $K(s,t)$ ist.

Auch von dieser Funktion gilt, wie von $\psi(s)$, dass ihr Quadrat, über das Grundgebiet integriert, einen endlichen bestimmten Wert ergibt.

Denn es ist:

$$4\int_a^\infty \chi_\nu{}^2(s)ds = \int_a^\infty \psi^2(s)ds + h_\nu{}^2 \int_a^\infty \left(\int_a^\infty K(s,t)\psi(t)\,dt\right)^2 ds$$

$$+ 2h_\nu \int_a^\infty \left(\psi(s)\int_a^\infty K(s,t)\psi(t)\,dt\right) ds$$

Das Integral $\int_a^\infty \psi^2(s)ds$ existiert; ferner haben wir die Ungleichung:

$$\int_a^\infty \left(\int_a^\infty K(s,t)\,\psi(t)\,dt\right)^2 ds \leqq \int_a^\infty \left(\int_a^\infty [K(s,t)]^2\,dt \,.\, \int_a^\infty \psi^2(t)dt\right) ds$$

$$= C\int_a^\infty \psi^2(t)dt.$$

Also hat auch dieses Integral wegen des positiven Vorzeichens seines Integranden einen bestimmten Wert, und ebenso das dritte Integral $\int_a^\infty \left(\psi(s)\int_a^\infty K(s,t)\psi(t)\,dt\right)\cdot ds$ auf Grund der Bemerkung zur Schwarzschen Ungleichung (§ 1).

Unsere Behauptung ist bewiesen.

Dieser Satz wird später noch gebraucht werden.

§ 7. Der Fundamentalsatz muss bei Integralgleichungen mit unendlichem Intervalle folgende Fassung erhalten:

Zu jedem nicht identisch verschwindenden Kerne $K(s,t)$ gibt es mindestens eine Eigenfunktion, wenn das Integral $U_1 = \int_a^\infty K(s,s)ds$ existiert und wenn die bisherigen Voraussetzungen (B) über den Kern erfüllt sind, d. h. wenn das Integral $\int_a^\infty [K(s,t)]^2 dt$ für alle Werte von s im Grundgebiete

bestimmte Werte besitzt, die alle unter einer endlichen Konstanten A liegen, und wenn das Doppelintegral $\int_a^\infty \int_a^\infty [K(s,t)]^2 ds\, dt$ gleich einer endlichen Konstanten C ist.

Beweis s. § 11.

§ 8. Der Beweis des ersten Satzes, dass $K(s,t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ ist, wenn die Reihe gleichmässig konvergiert, ist auf die Kerne, welche in den nachher zu behandelnden Beispielen auftreten, nicht anwendbar. Denn in diesem Beweise wird davon Gebrauch gemacht, dass für die Funktion

$$Q(s,t) = K(s,t) - \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu},$$

wenn sie nicht identisch verschwindet, der Fundamentalsatz des § 7 gilt. Dies ist aber bei der jetzigen Fassung desselben in den späteren Beispielen nicht mehr der Fall, weil das Integral $\int_a^\infty K(s,s)ds$, also auch das Integral $\int_a^\infty Q(s,s)\, ds$, keinen endlichen Wert hat.

Für den späteren Entwicklungssatz ist nur der Beweis der folgenden Identität notwendig:

$$K^2(s,t) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}.$$

Dem Beweise derselben schicken wir folgenden Hilfssatz voraus, den wir später noch verwenden werden:

V. Es sei $\varphi(s)$ eine Funktion von s, welche im ganzen Grundgebiete dem absoluten Werte nach kleiner als eine endliche Zahl c ist und deren Quadrat sich über das ganze Grundgebiet integrieren lässt. Dann besteht die Gleichung

$$\int_a^\infty \varphi(t) \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\, dt = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2} \int_a^\infty \varphi(t)\varphi_\nu(t)dt.$$

Beweis: Auf Grund der Integralgleichung ist

$$\sum_{\nu}^{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)} \frac{}{\lambda_\nu^2} = \sum \int_a^\infty K(s,\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha \cdot \int_a^\infty K(t,\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha.$$

Erteilen wir der Variablen s irgend einen Wert im Gebiete a, $+\infty$, den wir festhalten, während wir die Variable t von a bis $+\infty$ laufen lassen, so konvergiert die Reihe auf der rechten Seite nach dem Konvergenzsatze des § 2 absolut und gleichmässig, weil das Quadrat der Funktion $f(\alpha) = K(s,\alpha)$ von a bis $+\infty$ integrabel ist, also die Bedingung erfüllt wird, von der wir die Giltigkeit des Konvergenzsatzes bei unendlich grossem Grundgebiete abhängig gemacht hatten.

Da nach Voraussetzung $|\varphi(s)| < c$ ist, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu(s)\cdot\varphi(t)\cdot\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}$ absolut und gleichmässig, wenn s einen Wert im Grundgebiete hat, der unverändert bleibt, während t das Grundgebiet durchläuft.

Nach der Besselschen Ungleichung ist

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \left(\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\right)^2 = \sum_{\nu}^{0,\infty} \left(\int_a^\infty K(s,t)\varphi_\nu(t)dt\right)^2 \leqq \int_a^\infty [K(s,t)]^2 dt < A;$$

da der Summand der Reihe $\sum_{\nu}^{0,\infty} \left(\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\right)^2$ positiv ist, so folgt aus dieser Ungleichung, dass die Reihe für jeden Wert von s konvergiert.

Ferner können wir nach Schwarz folgende Zerlegung vornehmen:

$$\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\int_g^\infty \varphi(t)\varphi_\nu(t)dt\right)^2 \leqq \frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_g^\infty \varphi^2(t)dt \cdot \int_g^\infty \varphi^2{}_\nu(t)\,dt$$

$$\leqq \frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_g^\infty \varphi^2(t)dt;$$

mithin ist

$$\sum_{\nu}^{0,\infty}\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\int_g^\infty \varphi(t)\varphi_\nu(t)dt\right)^2 \leqq \int_g^\infty \varphi^2(t)dt \cdot \sum_{\nu}^{0,\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}.$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu}^{0,\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}$ (s. § 5) und der Existenz des Integrals $\int_a^\infty \varphi^2(t)dt$ muss auch die auf der linken Seite stehende Reihe, deren Summand ja wieder positiv ist, konvergieren.

Wir erhalten daher auf Grund des Hilfssatzes III für die Reihe der absoluten Beträge der Integralreste die Ungleichung

$$\sum_{\nu}^{0,\infty}\left|\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\int_g^\infty \frac{\varphi(t)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}dt\right| \leqq \left\{\sum_{\nu}^{0,\infty}\left(\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\right)^2 \sum_{\nu}^{0,\infty}\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\int_g^\infty \varphi(t)\varphi_\nu(t)dt\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$< \left\{A \cdot \int_g^\infty \varphi^2(t)dt \cdot \sum_{\nu}^{0,\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Bei unbegrenzt wachsendem g strebt die rechte Seite mithin auch die Reihe der Integralreste, dem Grenzwerte Null zu.

Zugleich erkennt man aus der Ungleichung, wenn man $g = a$ setzt, dass die Reihe der Integrale, d. h. die Reihe $\sum_{\nu}^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2}\int_a^\infty \varphi(t)\varphi_\nu(t)dt$, konvergiert.

Es sind daher alle Voraussetzungen des Hilfssatzes II erfüllt, und wir erhalten, wenn wir ihn anwenden, für jeden Wert von s im Grundgebiete die Gleichung

$$\int_a^\infty \varphi(t)\sum_{\nu}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}dt = \sum_{\nu}\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2}\int_a^\infty \varphi(t)\varphi_\nu(t)dt$$

w. z. b. w.

Um jetzt nachzuweisen, dass $K^2(s,t) = \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}$ ist, setzen wir:

$$Q(s,t) = K^2(s,t) - \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}.$$

Es sei ν ein bestimmter Wert des Index ν; so ist nach der Schwarzschen Ungleichung:

$$\left(\frac{\varphi_{\bar\nu}(s)}{\lambda_{\bar\nu}}\right)^2 \leqq \int_a^\infty [K(s,t)]^2 dt < A,$$

$$|\varphi_{\bar\nu}(s)| < \lambda_{\bar\nu} \cdot \sqrt{A};$$

ferner

$$\int_a^\infty \varphi_\nu{}^2(s)ds = 1.$$

Wir können daher den vorangeschickten Satz V auf $\varphi(s) = \varphi_{\bar\nu}(s)$ anwenden und bekommen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty Q(s,t)\varphi_{\bar\nu}(t)dt &= \int_a^\infty K^2(s,t)\varphi_{\bar\nu}(t)dt \\
&\quad - \int_a^\infty \varphi_{\bar\nu}(t) \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2} dt \\
&= \int_a^\infty K^2(s,t)\varphi_{\bar\nu}(t)dt \\
&\quad - \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2} \int_a^\infty \varphi_\nu(t)\varphi_{\bar\nu}(t)dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dies gilt für jedes bestimmte $\nu = \bar\nu$; also ist allgemein:

$$\int_a^\infty Q(s,t)\varphi_\nu(t)dt = 0.$$

Wäre $Q(s,t)$ nicht identisch gleich Null, so liesse sich auf $Q(s,t)$ der Fundamentalsatz des § 7 anwenden. Denn $Q(s,t)$ erfüllt die Voraussetzungen desselben.

Beweis:

$$U_1 = \int_a^\infty Q(s,s)ds = \int_a^\infty K^2(s,s)ds - \int_a^\infty \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu{}^2(s)}{\lambda_\nu{}^2}\, ds.$$

Hierin ist aber

$$\int_a^\infty K^2(s,s)ds = \int_a^\infty\int_a^\infty [K(s,r)]^2 dsdr = C;$$

$$\sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu{}^2(s)}{\lambda_\nu{}^2} \leqq \int_a^\infty [K(s,t)]^2 dt < A$$

wie schon oben, beim Beweise des Hilfssatzes V, gezeigt worden ist, also

$$\int_a^\infty \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu{}^2(s)}{\lambda_\nu{}^2}\, ds \leqq \int_a^\infty\int_a^\infty [K(s,t)]^2 dsdt = C.$$

Da der Integrand positiv ist, so besitzt das Integral der linken Seite und demnach auch U_1 einen bestimmten endlichen Wert. Es ist weiterhin:

$$\int_a^\infty [Q(s,t)]^2 dt = \int_a^\infty [K^2(s,t)]^2 dt + \int_a^\infty \left(\sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu{}^2} \right)^2 dt$$

$$- 2\int_a^\infty K^2(s,t) \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu{}^2}\, dt$$

$$\int_a^\infty\int_a^\infty [Q(s,t)]^2 dsdt = \int_a^\infty\int_a^\infty [K^2(s,t)]^2 dsdt$$

$$+\int_a^\infty\int_a^\infty\Big(\sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\Big)^2\,dsdt$$

$$-2\int_a^\infty\int_a^\infty K^2(s,t)\sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\,dsdt.$$

Nun bestehen aber nach § 6 die Ungleichungen:

$$\int_a^\infty[K^2(s,t)]^2dt \leqq C\int_a^\infty[K(s,t)]^2dt < AC,$$

$$\int_a^\infty\int_a^\infty[K^2(s,t)]^2dsdt \leqq C\int_a^\infty\int_a^\infty[K(s,t)]^2dsdt = C^2.$$

Ferner konvergiert die Reihe $\sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2}$ (s. den Beweis des Hilfssatzes V); daher lässt sich der Hilfssatz III anwenden und es ergibt sich die folgende Reihe von Ungleichungen:

$$\int_a^\infty\Big(\sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\Big)^2dt \leqq \int_a^\infty\sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2}\cdot\sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu^2(t)}{\lambda_\nu^2}\,dt$$

$$= \sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2}\cdot\int_a^\infty\sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu^2(t)}{\lambda_\nu^2}\,dt$$

$$\leqq C\int_a^\infty[K(s,t)]^2dt < AC,$$

$$\int_a^\infty\int_a^\infty\Big(\sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\Big)^2dsdt \leqq C\int_a^\infty\int_a^\infty[K(s,t)]^2dsdt = C^2.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt die Existenz der auf den linken Seiten stehenden einfachen und doppelten Integrale. Infolgedessen bekommen wir auf Grund der Ungleichung von Schwarz noch die folgenden Ungleichungen:

$$\left|\int_a^\infty K^2(s,t) \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\, dt\right| \leqq AC,$$

$$\left|\int_a^\infty\int_a^\infty K^2(s,t) \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\, ds dt\right| \leqq C^2,$$

und auch hier existieren nach § 1 die Integrale der linken Seiten.

Wir sind zu dem Ergebnisse gelangt: Das Integral $\int_a^\infty [Q(s,t)]^2 dt$ besitzt für alle Werte von s im Grundgebiete bestimmte Werte, die alle unter einer endlichen Konstanten $\bar{A}$ liegen und das Doppelintegral $\int_a^\infty\int_a^\infty [Q(s,t)]^2 ds\, dt$ ist gleich einer endlichen Konstanten $\bar{C}$.

$Q(s,t)$ erfüllt also in der Tat die Voraussetzungen des Fundamentalsatzes.

Daher gibt es, wenn $Q(s,t)$ nicht identisch verschwindet, zu $Q(s,t)$ mindestens eine Eigenfunktion $\chi(s)$, d. h. es besteht die Gleichung

$$\chi(s) = c \int_a^\infty Q(s,t)\chi(t)\, dt.$$

Dabei besitzt, wie in § 6 gezeigt worden ist, das Integral $\int_a^\infty \chi^2(s) ds$ einen bestimmten, endlichen Wert.

Wir haben nun die Gleichung

$$\int_a^\infty \chi(s)\varphi_\nu(s) ds = c \int_a^\infty \varphi_\nu(s) ds \int_a^\infty Q(s,t)\chi(t) dt.$$

In dem rechts stehenden Doppelintegrale kann auf Grund von Hilfssatz IV die Reihenfolge der Integration umgekehrt werden, weil $Q(s,t)$ dieselben Bedingungen befriedigt, wie der

Kern $K(s,t)$ und weil das Quadrat der Funktionen $k(s) = \varphi_\nu(s)$ und $l(s) = \chi(s)$ über das Grundgebiet integrabel ist.

Wir erhalten daher mit Hilfe der Relation

$$\int_a^\infty Q(s,t)\varphi_\nu(t)dt = 0$$

die folgende:

$$\int_a^\infty \chi(s)\varphi_\nu(s)ds = c\int_a^\infty \chi(t)dt \int_a^\infty Q(s,t)\varphi_\nu(s)ds$$

$$= 0.$$

Die Funktion $\chi(s)$ ist im Grundgebiete dem absoluten Betrage nach kleiner als eine endliche Konstante. Denn es ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\chi^2(s) = c^2\left(\int_a^\infty Q(s,t)\chi(t)dt\right)^2$$

$$\leqq c^2 \int_a^\infty [Q(s,t)]^2 dt \cdot \int_a^\infty \chi^2(t)dt$$

$$< c^2 \cdot \overline{A} \cdot \int_a^\infty \chi^2(t)dt;$$

das Integral $\int_a^\infty \chi^2(t)dt$ besitzt aber einen bestimmten, endlichen Wert.

Daher erfüllt $\chi(s)$ die Voraussetzungen des obigen Satzes V; nach diesem ist nun:

$$\int_a^\infty Q(s,t)\chi(t)dt = \int_a^\infty K^2(s,t)\chi(t)\,dt$$

$$-\int_a^\infty \chi(t) \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\,dt$$

$$= \int_a^\infty K^2(s,t)\chi(t)dt$$

$$- \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2} \int_a^\infty \chi(t)\varphi_\nu(t)dt$$

$$= \int_a^\infty K^2(s,t)\chi(t)dt, \qquad \text{folglich}$$

$$\chi(s) = c \int_a^\infty K^2(s,t)\chi(t)\,dt,$$

d. h. die Funktion $\chi(s)$ wäre auch eine Eigenfunktion des Kernes $K^2(s,t)$, und würde, da ihr Quadrat über das Grundgebiet integrabel ist, $\chi(s)$ also die Voraussetzung (A) erfüllt, dem normierten Orthogonalsystem des Kernes $K^2(s,t)$ angehören. Das ist aber unmöglich, weil das System der $\varphi_\nu(s)$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$ und folglich auch des Kernes $K^2(s,t)$ sein sollte.

Also muss $Q(s,t) \equiv 0$ sein:

$$K^2(s,t) = \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}.$$

§ 9. Der erste Satz hat, wenn das Intervall der Integralgleichung $a,\ b = a,\ +\infty$ ist, folgendermassen zu lauten:

Aus der für alle ν giltigen Beziehung

$$\int_a^\infty h(s)\varphi_\nu(s)ds = 0$$

folgt die andere

$$\int_a^\infty K(s,t)h(t)dt = 0,$$

wenn $h(s)$ eine stetige Funktion ist, deren Quadrat sich über das Grundgebiet integrieren lässt.

Beweis: Da das Integral $\int_a^\infty h^2(s)ds$ einen bestimmten Wert besitzen soll, so muss $h(s)$ im Unendlichen verschwinden, d. h. es muss sich eine endliche Zahl g angeben lassen, so dass für $g \leqq s \leqq +\infty$ $|h(s)|$ kleiner als eine vorher gegebene Konstante c ist. In dem endlichen Intervalle $a \leqq s \leqq g$ aber muss $|h(s)|$ wegen der Stetigkeit unter einer Konstanten c_1 bleiben.

Die Funktion $\varphi(s) = h(s)$ befriedigt also die Voraussetzungen des Satzes V. Daher erhalten wir mit Hilfe der im vorangehenden Paragraphen bewiesenen Gleichung

$$K^2(s,t) = \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}$$

die folgenden:

$$\int_a^\infty K^2(s,t)h(t)dt = \int_a^\infty h(t) \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\, dt$$

$$= \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2} \int_a^\infty h(t)\varphi_\nu(t)dt$$

$$= 0.$$

Jetzt kann man weiter schliessen wie Schmidt. Die Reihenfolgen der Integrationen lassen sich nach Hilfssatz IV umkehren, weil die von a bis $+\infty$ erstreckten Integrale über dem Quadrate der in Betracht kommenden Funktionen existieren.

Man erhält schliesslich die Gleichung

$$\int_a^\infty K(s,t)h(t)dt = 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Der zweite Satz des § 9 muss bei Integralgleichungen mit unendlichem Intervalle folgende Fassung erhalten:

Es sei die stetige Funktion $g(s)$ darstellbar durch die Gleichung

$$g(s) = \int_a^\infty K(s,t)p(t)dt,$$

oder, nach der von Kneser[1]) eingeführten Bezeichnung, „quellenmässig“ darstellbar mit Hilfe des Kernes $K(s,t)$, und hierbei habe das Integral $\int_a^\infty p^2(t)dt$ einen bestimmten, endlichen Wert. Dann lässt sich die folgende Entwicklung herstellen, welche im ganzen Grundgebiete absolut und gleichmässig konvergiert:

$$g(s) = \sum_\nu^{0,\infty} \varphi_\nu(s) \int_a^\infty g(t)\varphi_\nu(t)dt$$

$$= \sum_\nu^{0,\infty} \varphi_\nu(s) \int_a^\infty \varphi_\nu(t)dt \int_a^\infty K(t,\alpha)p(\alpha)d\alpha$$

$$= \sum_\nu^{0,\infty} \varphi_\nu(s) \int_a^\infty p(\alpha)d\alpha \int_a^\infty K(t,\alpha)\varphi_\nu(t)dt$$

$$= \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha .$$

Beweis: Wir setzen

$$g(s) - \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha = h(s).$$

Nach dem in § 2 bewiesenen Konvergenzsatze konvergiert die Reihe

$$\sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha =$$

---

[1]) Adolf Kneser, Integralgleichungen und ihre Anwendungen auf die mathematische Physik. Braunschweig 1911.

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \int_a^\infty K(s,t)\varphi_\nu(t)dt \cdot \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha$$

im Grundgebiete absolut und gleichmässig, weil das Integral $\int_a^\infty [K(s,t)]^2 dt < A$ ist und das Quadrat von $p(\alpha)$ sich über das Grundgebiet integrieren lässt.

Es sei nun ν ein bestimmter Wert des Index ν; so ist

$$\int_a^\infty h(s)\varphi_{\bar\nu}(s)ds = \int_a^\infty g(s)\varphi_{\bar\nu}(s)ds$$

$$-\int_a^\infty \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_{\bar\nu}(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha\,ds.$$

Da $|\varphi_{\bar\nu}(s)| < \lambda_{\bar\nu}\sqrt{A}$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_{\bar\nu}(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha$$

absolut und gleichmässig im Grundgebiete.

Ferner ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\int_g^\infty \varphi_\nu(s)\varphi_\nu(s)ds\right)^2 \leqq \frac{1}{\lambda_\nu{}^2}\int_g^\infty \varphi^2{}_\nu(s)ds \cdot \int_g^\infty \varphi^2{}_\nu(s)ds$$

$$< \frac{1}{\lambda_\nu{}^2}\cdot \int_g^\infty \varphi^2{}_{\bar\nu}(s)ds,$$

also

$$\sum_{\nu}^{0,\infty}\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\int_g^\infty \varphi_\nu(s)\varphi_\nu(s)ds\right)^2 < \int_g^\infty \varphi_\nu{}^2(s)ds \cdot \sum_{\nu}^{0,\infty}\frac{1}{\lambda_\nu{}^2};$$

und nach der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{\nu}^{0,\infty}\left(\int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha\right)^2 \leqq \int_a^\infty p^2(\alpha)d\alpha.$$

In den beiden letzten Umgleichungen sind die Reihen auf den linken Seiten konvergent.

Mithin folgt nach Satz III:

$$\sum_{\nu}^{0,\infty}\left|\int_{g}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\,ds\cdot\int_{a}^{\infty}p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha\right|\leqq$$

$$\left\{\sum_{\nu}^{0,\infty}\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\int_{g}^{\infty}\varphi_\nu(s)\varphi_{\bar\nu}(s)ds\right)^2\cdot\sum_{\nu}^{0,\infty}\left(\int_{a}^{\infty}p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d(\alpha)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$<\left\{\int_{g}^{\infty}\varphi_{\bar\nu}{}^2(s)ds\cdot\sum_{\nu}^{0,\infty}\frac{1}{\lambda_{\bar\nu}{}^2}\cdot\int_{a}^{\infty}p^2(\alpha)d\alpha\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Da das Integral $\int_{a}^{\infty}\varphi_{\bar\nu}{}^2(s)ds$ den Wert 1 besitzt, so konvergiert die rechte Seite dieser Ungleichung und mithin auch die auf der linken Seite stehende Reihe der absoluten Beträge der Integralreste bei unbegrenzt wachsendem g gegen Null.

Setzt man $g = a$, so sieht man, dass die Reihe der Integrale, d. h. die Reihe

$$\sum_{\nu}^{0,\infty}\int_{a}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\,ds\int_{a}^{\infty}p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha$$

konvergent ist.

Daher bekommen wir nach Hilfssatz II die Gleichung

$$\int_{a}^{\infty}h(s)\varphi_{\bar\nu}(s)ds=\int_{a}^{\infty}g(s)\varphi_{\bar\nu}(s)ds$$

$$-\sum_{\nu}^{0,\infty}\int_{a}^{\infty}\varphi_\nu(s)\varphi_{\bar\nu}(s)ds\int_{a}^{\infty}p(\alpha)\frac{\varphi_\nu(\alpha)}{\lambda_\nu}\,d\alpha$$

$$=\int_{a}^{\infty}g(s)\varphi_{\bar\nu}(s)ds-\int_{a}^{\infty}p(\alpha)\frac{\varphi_{\bar\nu}(\alpha)}{\lambda_\nu}\,d\alpha$$

$$= \int_a^\infty g(s)\varphi_\nu(s)ds$$

$$- \int_a^\infty p(\alpha)d\alpha \int_a^\infty K(t,\alpha)\varphi_\nu(t)dt.$$

In dem Doppelintegrale können wir nach Hilfssatz IV die Reihenfolge der Integrationen umkehren, weil die beiden Integrale $\int_a^\infty p^2(\alpha)d\alpha$ und $\int_a^\infty \varphi^2{}_\nu(\alpha)d\alpha$ bestimmte Werte besitzen.

Daher bekommen wir die Gleichungen:

$$\int_a^\infty p(\alpha)d\alpha \int_a^\infty K(t,\alpha)\varphi_\nu(t)dt = \int_a^\infty \varphi_\nu(t)dt \int_a^\infty K(t,\alpha)p(\alpha)d\alpha$$

$$= \int_a^\infty g(t)\varphi_\nu(t)dt$$

$$\int_a^\infty h(s)\varphi_\nu(s)ds = 0.$$

Diese Beziehung besteht für jedes bestimmte ν, mithin ist wiederum allgemein für jedes ν:

$$\int_a^\infty h(s)\varphi_\nu(s)ds = 0.$$

$h(s)$ ist eine stetige Funktion von s, und das Integral $\int_a^\infty h^2(s)ds$ besitzt einen bestimmten endlichen Wert. Denn:

$$h(s) = g(s) - \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha.$$

$g(s)$ ist nach Voraussetzung eine stetige Funktion von s. Ebenso stellt aber auch die Reihe der rechten Seite eine stetige Funktion von s dar, weil dieselbe, wie am Anfange dieses Beweises gezeigt wurde, im Grundgebiete gleichmässig konvergiert.

Mithin ist auch $h(s)$ eine stetige Funktion von s.

Ferner bestehen die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

$$h^2(s) = g^2(s) + \left(\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha\right)^2$$

$$- 2g(s) \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha) d\alpha\,;$$

$$\int_a^\infty h^2(s)ds < \int_a^\infty g^2(s)ds$$

$$+ \int_a^\infty \left(\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha\right)^2 ds$$

$$+ 2\int_a^\infty |g(s)| \cdot \left| \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha \right| ds.$$

$$\int_a^\infty g^2(s)ds \leqq \int_a^\infty \int_a^\infty [K(s,t)]^2 dt \cdot \int_a^\infty p^2(t)dt \cdot ds$$

$$= C \int_a^\infty p^2(t)dt;$$

aus dieser Ungleichung folgt, dass das Integral $\int_a^\infty g^2(s)\,ds$ existiert.

Nun konvergiert sowohl die Reihe $\sum_{\nu}^{0,\infty}\left(\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\right)^2$ (s. § 8) als auch die Reihe $\sum_{\nu}^{0,\infty}\left(\int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha\right)^2$, und der Wert der ersteren ist nach § 8 $\leqq \int_a^\infty [K(s,t)]^2 dt$, der der letzteren $\leqq \int_a^\infty p^2(\alpha)d\alpha$, wie oben gezeigt worden ist. Daher besteht nach Satz III die Ungleichung:

$$\int_a^\infty\left(\sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha\right)^2 ds \leqq \int_a^\infty\left\{\sum_\nu^{0,\infty}\left(\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\right)^2\cdot\sum_\nu^{0,\infty}\left(\int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha\right)^2\right\} ds$$

$$\leqq C\cdot\int_a^\infty p^2(\alpha)d\alpha,$$

welche die Existenz des auf der linken Seite stehenden Integrals anzeigt.

Jetzt können wir die Schwarzsche Ungleichung auf den dritten Summanden des Integrals $\int_a^\infty h^2(s)ds$, nämlich die Grösse

$$2\int_a^\infty |g(s)|\cdot\left|\sum_\nu^{0,\infty}\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha\right| ds,$$

anwenden.

Es zeigt sich, dass das Integral $\int_a^\infty h^2(s)ds$ unter einer endlichen Schranke liegt. Infolgedessen muss es selbst einen bestimmten endlichen Wert haben.

Die Funktion $h(s)$ besitzt also die Eigenschaften, die wir von ihr behauptet hatten.

Nach dem ersten Satze dieses Paragraphen ergibt sich daher aus der Gleichung $\int_a^\infty h(s)\varphi_\nu(s)ds = 0$ die folgende:

$$\int_a^\infty K(s,t)h(t)dt = 0.$$

Jetzt schreiben wir

$$\int_a^\infty h^2(s)ds = \int_a^\infty h(s)g(s)ds$$

$$-\int_a^\infty \sum_\nu^{0,\infty} \frac{h(s)\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha ds.$$

Auf dieselbe Weise wie oben beim Nachweis der Beziehung $\int_a^\infty h(s)\varphi_\nu(s)ds = 0$ lässt sich zeigen, dass auf den letzten Summanden der Hilfssatz II anwendbar ist, so dass wir erhalten:

$$\int_a^\infty h^2(s)ds = \int_a^\infty h(s)g(s)ds$$

$$-\sum_\nu^{0,\infty} \int_a^\infty h(s)\varphi_\nu(s)ds \int_a^\infty p(\alpha)\frac{\varphi_\nu(\alpha)}{\lambda_\nu} d\alpha$$

$$= \int_a^\infty h(s)g(s)ds$$

$$= \int_a^\infty h(s)ds \int_a^\infty K(s,t)p(t)dt.$$

Auch in diesem Doppelintegrale lässt sich nach Satz IV die Integrationsfolge umkehren.

Es ergibt sich daher die Gleichung:

$$\int_a^\infty h^2(s)ds = \int_a^\infty p(t)dt \int_a^\infty K(s,t)h(s)ds$$

$$= 0,$$

folglich $$h(s) \equiv 0$$

$$g(s) = \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^\infty p(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha$$

$$= \sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(s) \int_a^\infty p(\alpha)d\alpha \int_a^\infty K(t,\alpha)\varphi_\nu(t)dt\,.$$

Wir haben oben gezeigt, dass für jeden bestimmten Wert von ν die Beziehung besteht:

$$\int_a^\infty p(\alpha)d\alpha \int_a^\infty K(t,\alpha)\varphi_\nu(t)dt =$$

$$\int_a^\infty \varphi_\nu(t)dt \int_a^\infty K(t,\alpha)p(\alpha)d\alpha\,.$$

Mithin bekommen wir die Entwicklung:

$$g(s) = \sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(s) \int_a^\infty \varphi_\nu(t)\,dt \int_a^\infty K(t,\alpha)p(\alpha)d\alpha$$

$$= \sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(s) \int_a^\infty g(t)\varphi_\nu(t)dt.$$

Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

§ 11. Wir holen hier den Beweis des Fundamentalsatzes in der in § 7 für Integralgleichungen mit unendlichem Intervalle angegebenen Fassung nach.

Die Voraussetzungen sind, dass das Integral $U_1 = \int_a^\infty K(s,s)ds$ endlich und bestimmt ist, dass das Integral $\int_a^\infty [K(s,t)]^2 dt$ für alle Werte von s im Grundgebiete bestimmte Werte besitzt, die alle unter einer endlichen Konstanten A liegen, und dass das

Doppelintegral $\int_a^\infty\int_a^\infty [K(s,t)]^2 ds dt$ gleich einer endlichen Konstanten C_2 ist.

Wir haben nachzuweisen, dass die von Schmidt eingeführten Integrale

$$U_n = \int_a^\infty K^n(s,s)\, ds$$

überhaupt existieren.

Es ist nach Definition

$$K^n(s,t) = \int_a^\infty K(s,r) K^{n-1}(t,r)\, dr, \qquad \text{folglich}$$

$$[K^n(s,t)]^2 \leqq \int_a^\infty [K(s,r)]^2 dr \cdot \int_a^\infty [K^{n-1}(t,r)]^2 dr$$

$$\leqq \int_a^\infty [K(s,r)]^2 dr \times$$

$$\int_a^\infty \left(\int_a^\infty [K(t,\alpha)]^2 d\alpha \cdot \int_a^\infty [K^{n-2}(r,\alpha)]^2 d\alpha \right) dr$$

$$= \int_a^\infty [K(s,r)]^2 dr \cdot \int_a^\infty [K(t,\alpha)]^2 d\alpha \times$$

$$\int_a^\infty \int_a^\infty [K^{n-2}(r,\alpha)]^2 dr d\alpha .$$

$$| U_n | \leqq \int_a^\infty | K^n(s,s) | ds$$

$$\leqq \int_a^\infty \int_a^\infty [K(s,r)]^2 ds dr \left(\int_a^\infty \int_a^\infty [K^{n-2}(r,\alpha)]^2 dr d\alpha \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= C\left(\int_a^{\infty}\int_a^{\infty}[K^{n-2}(r,\alpha)]^2 dr d\alpha.\right)^{\frac{1}{2}}$$

Diese Ungleichungen gelten nur unter der Voraussetzung, dass das letzte Doppelintegral existiert. Aus den in § 6 abgeleiteten Formeln folgt aber, wenn dort $\nu = n-2$ gesetzt wird, die Ungleichung

$$\int_a^{\infty}\int_a^{\infty}[K^n(t,r)]^2 dt dr \leqq C^{n-1}\int_a^{\infty}\int_a^{\infty}[K(t,\alpha)]^2 dt d\alpha.$$

$$= C^n.$$

Daher hat das Doppelintegral der linken Seite für jedes n in der Tat einen bestimmten Wert und infolgedessen wird

$$| U_n | \leqq C^{\frac{n}{2}}.$$

Diese Ungleichung ist allein mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung abgeleitet. Berücksichtigen wir die Bemerkung über dieselbe in § 1, so erkennen wir, dass die Integrale U_n wirklich existieren.

Jetzt können wir dem von Schmidt angegebenen Gange des Beweises folgen, bis wir zu der Ungleichung gelangen:

$$\left(\frac{K^{2n+2m}(s,t)}{c^{n+m}} - \frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}\right)^2 \leqq \frac{1}{c^2}\int_a^{\infty}[K(s,r_1)]^2 dr_1 \cdot \int_a^{\infty}[K(t,r_2)]^2 dr_2 \times$$

$$\left\{\frac{U_{4n+4m-4}}{c^{2n+2m-2}} - 2\,\frac{U_{4n+2m-4}}{c^{2n+m-2}} + \frac{U_{4n-4}}{c^{2n-2}}\right\}.$$

Aus dieser folgt wie bei endlichem Grundgebiete, dass der Ausdruck $\frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}$ mit wachsendem n gleichmässig gegen eine mithin stetige Funktion $u(s,t)$ konvergiert, weil $\lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{c^n} = U \geqq 1$ ist.

Um zu zeigen, dass diese Funktion $u(s,t)$ nicht identisch in s und t verschwinden kann, haben wir ein etwas um-

ständlicheres Verfahren einzuschlagen, als bei endlichem Grundgebiete.

Lassen wir nämlich in der obigen Ungleichung m über alle Grenzen wachsen, so erhalten wir die folgende Ungleichung:

$$\left(u(s,t)-\frac{K^{2n}(s,t)}{c^n}\right)^2 \leqq \frac{1}{c^2}\int_a^\infty [K(s,r_1)]^2 dr_1 \cdot \int_a^\infty [K(t,r_2)]^2 dr_2 \left(\frac{U_{4n-4}}{c^{2n-2}} - U\right),$$

und in dieser können wir wegen der Beziehungen

$$\frac{U_{2n+2}}{c^{n+1}} \leqq \frac{U_{2n}}{c^n},$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{c^n} = U \geqq 1$$

setzen:

$$\frac{U_{4n-4}}{c^{2n-2}} - U = \varepsilon_n^2,$$

wobei

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

wird, so dass wir, ε_n als nicht negativ vorausgesetzt, bekommen:

$$\left| u(s,t) - \frac{K^{2n}(s,t)}{c^n} \right| \leqq \frac{\varepsilon_n}{c}\left(\int_a^\infty [K(s,r_1)]^2 dr_1 \cdot \int_a^\infty [K(t,r_2)]^2 dr_2.\right)^{\frac{1}{2}}$$

Diese Ungleichung können wir, wenn wir die abkürzende Bezeichnung einführen:

$$\int_a^\infty [K(s,r_1)]^2 dr_1 \cdot \int_a^\infty [K(t,r_2)]^2 dr_2 = R(s,t),$$

auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{K^{2n}(s,t)}{c^n} - \frac{\varepsilon_n}{c}\sqrt{R(s,t)} \leqq u(s,t) \leqq \frac{K^{2n}(s,t)}{c^n} + \frac{\varepsilon_n}{c}\sqrt{R(s,t)}.$$

Daraus ergeben sich die weiteren Ungleichungen:

$$\int_a^\infty \frac{K^{2n}(s,s)}{c^n}\,ds - \frac{\varepsilon_n}{c}\int_a^\infty\int_a^\infty [K(s,r_1)]^2 ds\,dr_1 \leqq \int_a^\infty u(s,s)ds \leqq$$

$$\int_a^\infty \frac{K^{2n}(s,s)}{c^n}\,ds + \frac{\varepsilon_n}{c}\int_a^\infty\int_a^\infty [(Ks,r_1)]ds dr_1,$$

welche bei unbegrenzt wachsendem n die folgenden Beziehungen liefern:

$$\int_a^\infty u(s,s)ds = \lim_{n=\infty}\int_a^\infty \frac{K^{2n}(s,s)}{c^n}\,ds = \lim_{n=\infty}\frac{U_{2n}}{c^n} = U \geqq 1.$$

Also kann die Funktion $u(s,t)$ nicht identisch in s und t verschwinden, und es lässt sich daher ein Wert $t = t_1$ wählen, so dass die Funktion $\psi(s) = u(s,t_1)$ nicht identisch in s verschwindet.

Von dieser Funktion $\psi(s)$ wollen wir jetzt zeigen, dass ihr Quadrat von a bis $+\infty$ integrabel ist:

Wir quadrieren und integrieren die Ungleichungen:

$$\frac{K^{2n}(s,t_1)}{c^n} - \frac{\varepsilon_n}{c}\sqrt{R(s,t_1)} \leqq \psi(s) \leqq \frac{K^{2n}(s,t_1)}{c^n} + \frac{\varepsilon_n}{c}\sqrt{R(s,t_1)}.$$

Wir haben dann das Verhalten der folgenden drei Ausdrücke bei unbegrenzt wachsendem n zu untersuchen:

1) $$\int_a^\infty \left(\frac{K^{2n}(s,t_1)}{c^n}\right)^2 ds,$$

2) $$\int_a^\infty \frac{K^{2n}(s,t_1)}{c^n}\sqrt{R(s,t_1)}\,ds,$$

3) $$\int_a^\infty R(s,t_1)ds.$$

Das zweite von diesen Integralen lässt sich offenbar mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung durch das erste

und dritte abschätzen, wenn wir gezeigt haben, dass diese beiden existieren.

Nun haben wir für jedes n die folgende Reihe von Beziehungen:

$$K^{2n}(s,t_1) = \int_a^\infty K^{2n-1}(s,r)\cdot K(t_1,r)dr,$$

$$[K^{2n}(s,t_1)]^2 \leqq \int_a^\infty [K^{2n-1}(s,r)]^2 dr \cdot \int_a^\infty [K(t_1,r)]^2 dr$$

$$< A \int_a^\infty [K^{2n-1}(s,r)]^2 dr,$$

folglich

$$\int_a^\infty \left(\frac{K^{2n}(s,t_1)}{c^n}\right)^2 ds < \frac{A}{c^{2n}} \int_a^\infty\int_a^\infty [K^{2n-1}(s,r)]^2 ds dr$$

$$= \frac{A}{c}\,\frac{U_{2(2n-1)}}{c^{2n-1}}.$$

Es ist aber nach Schmidt:

$$\frac{U_{2(n+1)}}{c^{n+1}} \leqq \frac{U_{2n}}{c^n} \leqq \frac{U_{2(n-1)}}{c^{n-1}} \leqq \ldots \leqq \frac{U_2}{c} \leqq U_1,$$

mithin

$$\int_a^\infty \left(\frac{K^{2n}(s,t_1)}{c^n}\right)^2 ds < \frac{A}{c}\, U_1.$$

Diese Ungleichung gilt für jedes n, und daher ist auch

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\infty \left(\frac{K^{2n}(s,t_1)}{c^n}\right)^2 ds < \frac{A}{c}\, U_1,$$

weil die rechte Seite von n unabhängig ist.

Was den Ausdruck 3) anbelangt, so ist

$$\int_a^\infty R(s,t_1)ds = \int_a^\infty \left(\int_a^\infty [Ks,r_1]^2 dr_1 \cdot \int_a^\infty [K(t_1,r_2)]^2 dr_2 \right) ds$$

$$= \int_a^\infty [K(t_1,r_2)]^2 \, dr_2 \cdot \int_a^\infty \int_a^\infty [K(s,r_1)]^2 ds dr_1$$

$$< AC.$$

Infolgedessen bleibt auch das Integral 2) bei beliebigem, auch unbegrenzt zunehmendem n zwischen endlichen, von n unabhängigen Schranken.

Lassen wir n gegen ∞ konvergieren, so erhalten wir das Resultat:

$$\int_a^\infty \psi^2(s)ds = \lim_{n=\infty} \int_a^\infty \left(\frac{K^{2n}(s,t_1)}{c^n} \right)^2 ds < \frac{A}{c} U_1.$$

Aus dieser Ungleichung folgt wegen des positiven Vorzeichens des Integranden die Existenz des Integrales $\int_a^\infty \psi^2(s)ds$, w. z. b. w.

Dass die Funktion $\psi(s) = u(s,t_1)$ Eigenfunktion des Kernes $K^2(s,t)$ ist, erkennen wir durch folgende Rechnung:

In der Gleichung

$$\frac{K^{2n+2}(s,t_1)}{c^{n+1}} = \frac{1}{c} \int_a^\infty K^2(s,r) \, \frac{K^{2n}(r,t_1)}{c^n} \, dr$$

gehen wir auf beiden Seiten zur Grenze $n = \infty$ über und addieren und subtrahieren rechts die Grösse $\frac{1}{c} \int_a^\infty K^2(s,r) \cdot u(r,t_1) dr$. Wie sich unmittelbar mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung ergibt, existiert dieses Integral, weil die Quadrate von $K^2(s,r)$ (s. oben) und $u(r,t_1)$ über das Grundgebiet integrabel sind.

Wir erhalten so folgende Gleichung:

$$u(s,t_1)=\frac{1}{c}\int_a^\infty K^2(s,r)\cdot u(r,t_1)\cdot dr$$

$$+\lim_{n=\infty}\frac{1}{c}\int_a^\infty K^2(s,r)\left(\frac{K^{2n}(r,t_1)}{c^n}-u(r,t_1)\right)dr.$$

Nun ist aber

$$\left|\int_a^\infty K^2(s,r)\left(\frac{K^{2n}(r,t_1)}{c^n}-u(r,t_1)\right)dr\right|$$

$$\leqq\int_a^\infty|K^2(s,r)|\cdot\left|\frac{K^{2n}(r,t_1)}{c^n}-u(r,t_1)\right|\cdot dr$$

$$\leqq\frac{\varepsilon_n}{c}\int_a^\infty|K^2(s,r)|\cdot\sqrt{R(r,t_1)}\,dr$$

$$\leqq\frac{\varepsilon_n}{c}\left(\int_a^\infty[K^2(s,r)]^2\,dr\cdot\int_a^\infty R(r,t_1)\,dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq\frac{\varepsilon_n}{c}AC$$

nach kürzlich angeführten Formeln.

Der Grenzwert dieses Ausdruckes für $n=\infty$ ist aber gleich Null.

So kommen wir zu der Integralgleichung

$$u(s,t_1)=\frac{1}{c}\int_a^\infty K^2(s,r)\cdot u(r,t_1)\cdot dr,$$

welche zeigt, dass der Kern $K^2(s,t)$ eine nicht identisch verschwindende Eigenfunktion $\psi(s)=u(s,t_1)$ besitzt. Das Quadrat derselben ist über das Grundgebiet integrabel.

Nach § 6 folgt jetzt, dass auch der Kern $K(s,t)$ eine nicht identisch verschwindende Eigenfunktion haben muss.

Damit ist der Fundamentalsatz für Integralgleichungen mit unendlichem Grundgebiete vollständig nachgewiesen.

II. Kapitel.

Das Sturm-Liouvillesche Randwertproblem bei unendlichem Grundgebiete.

Die im III. Kapitel zu behandelnden Probleme der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen sind, wie wir dort zeigen werden, spezielle Fälle des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems bei unendlichem Grundgebiete. Für den Fall, dass das Grundgebiet ein endliches Intervall a, b ist, ist dieses Randwertproblem, worauf schon in der Einleitung hingewiesen wurde, von Kneser im 63. Bande der Mathematischen Annalen[1]) ausführlich behandelt worden.

Wir wollen in diesem II. Kapitel die in der genannten Abhandlung angestellten Untersuchungen für gewisse Fälle der Randbedingungen auf ein unendliches Grundgebiet $I = a, +\infty$ ausdehnen, wo a eine endliche Zahl oder gleich $-\infty$ sein soll.

Die in Frage stehende Abhandlung wollen wir der Kürze halber mit U zitieren.

Ferner wollen wir von jetzt an unter g_1 und g_2 immer zwei Zahlen verstehen, von denen g_1 die kleinere sei und von denen wir folgendes festsetzen:

g_2 sei eine positive Zahl, die beliebig gross sein kann, aber endlich ist und fest bleibt. g_1 sei, wenn $a = -\infty$ ist, eine ebensolche negative Zahl; wenn aber a endlich ist, so sei $g_1 = -a$ eine positive Zahl, die beliebig klein sein kann, aber gleichfalls endlich und fest ist.

Eine Gleichung, die für jedes Gebiet g_1, g_2 besteht, in der jedoch beide Seiten von g_1 und g_2 unabhängig sind, gilt, wenn $a = -\infty$ ist, im ganzen Grundgebiete $I = -\infty, +\infty$, wenn a aber endlich ist, in jedem Intervalle $g_1, +\infty$.

Denn wenn die Gleichung nicht mehr gelten würde, sobald die unabhängige Veränderliche x über jede angebbare Grenze hinauswächst, so ist sie eben nur richtig, solange x

---

[1]) Integralgleichungen und Darstellung willkürlicher Funktionen.

unter einer bestimmten angebbaren Zahl g bleibt, hört aber auf richtig zu sein, sobald x grösser wird als g. Das Letztere ist indessen unmöglich; denn da beispielsweise $g+1$ auch eine von den Zahlen g_2 ist, so gilt die Gleichung auch für $x = g + 1$. Mithin kann der Geltungsbereich der Gleichung keine obere Grenze haben. Das entsprechende Resultat ergibt sich für negative Werte der unabhängigen Variablen und damit ist die Behauptung erwiesen.

§ 12. Das Randwertproblem. Die quellenmässige Darstellung einer willkürlichen Funktion. Die Integralgleichung

Die Funktionen $V(x)$ seien die samt ihrer ersten Ableitung im Intervalle $I = a, +\infty$ stetigen Lösungen des durch folgende Gleichungen dargestellten Randwertproblems:

$$(C) \qquad \frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + (\lambda - l)V = 0;$$

$$V|^a = 0 \text{ oder } = \textit{finit.},$$

je nachdem ob $a = -\infty$ oder ob a eine endliche Zahl ist;

$$V|^{+\infty} = 0.$$

k und l seien in dem ganzen Intervalle I samt ihren Ableitungen 1. und 2. Ordnung stetig, k sei ausserdem für $x > a$ positiv. λ kann eine unendliche Reihe von diskreten Werten durchlaufen; jedoch möge der Wert $\lambda = 0$ keine Lösung des Randwertproblems oder, wie wir nachher im Sinne der Theorie der Integralgleichungen sagen werden, keine Eigenfunktion liefern.

Wir bilden jetzt zwei Integrale $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) - ly = 0,$$

von denen das erstere, $\varphi(x)$, zunächst am unteren Ende des Intervalles I definiert sei und die an demselben geltenden Randbedingungen der Funktionen $V(x)$ befriedige. Dasselbe gelte von $\psi(x)$ bezüglich des oberen Endes von I. Beide Funktionen, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, sind für $x > a$ samt ihrer ersten Ableitung stetig, weil die Koeffizienten der Differential-

gleichung, wenn man den der 2. Ableitung auf den Wert Eins bringt, für $x > a$ mit ihren ersten Ableitungen stetig sind. Da ferner der Parameterwert $\lambda = 0$ eine Lösung des Randwertproblems nicht liefern sollte, so kann die Funktion $\varphi(x)$, welche die Randbedingung bei $x = a$ erfüllt, nicht auch diejenige bei $x = +\infty$ erfüllen, und bei $\psi(x)$ gilt das Umgekehrte. Das heisst: $\varphi(x)$ kann bei $x = +\infty$ nicht den Grenzwert Null haben; ebenso kann $\psi(x)$, wenn $a = -\infty$ ist, bei $x = a$ nicht verschwinden; wenn dagegen a endlich ist, so muss $\psi(x)$ bei $x = a$ über alle Grenzen wachsen.

Auf Grund dieser Eigenschaften der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ können wir folgenden Satz beweisen:

Jedes Integral $\bar{y}$ der Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dy}{dx}\right) - ly = 0,$$

welches im Gebiete I stetig ist, und zwar im Falle, dass a eine endliche Zahl bedeutet, einschliesslich des Punktes $x = a$, welches ferner die Randbedingungen der Funktionen $V(x)$ befriedigt und dessen erste Ableitung in jedem Intervalle g_1, g_2 stetig ist, muss im ganzen Grundgebiete identisch Null sein.

Beweis: Da y in jedem Gebiete g_1, g_2 samt der ersten Ableitung stetig ist und $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die beiden partikulären Integrale der obigen Differentialgleichung waren, so haben wir die Gleichung anzusetzen:

$$\bar{y} = a_1\,\varphi(x) + a_2\,\psi(x),$$

in welcher a_1 und a_2 Konstante bedeuten. Diese Gleichung gilt zunächst in jedem Intervalle g_1, g_2, dann aber, wegen des am Anfange dieses Kapitels bewiesenen Satzes, wenn $a = -\infty$ ist, im ganzen Grundgebiete, und wenn a endlich ist, in jedem Gebiete g_1, $+\infty$.

Im 1. Falle sehen wir, wenn wir nacheinander $x = +\infty$ und $x = -\infty$ setzen, sofort, dass $a_1 = a_2 = 0$ sein muss, so dass im ganzen Grundgebiete die Gleichung besteht:

$$\bar{y} = 0$$

und unsere Behauptung für diesen Fall bewiesen ist.

Im 2. Falle, wo a endlich ist, setzen wir $x = +\infty$ und erhalten

$$a_1 = 0,$$
$$\bar{y} = a_2 \psi(x),$$

für jedes Intervall $g_1, +\infty$.

Wir betrachten nun das Verhalten der beiden Seiten dieser Gleichung in der Nähe von $x = a$. $\bar{y}$ ist nach Voraussetzung an der Stelle $x = a$ stetig. Daher besitzt $\bar{y}$ dort einen bestimmten Grenzwert, und es lässt sich, wenn mit c eine positive Zahl bezeichnet wird, die grösser ist als der absolute Betrag dieses Grenzwertes, eine Zahl δ_1 bestimmen, von der Art, dass für

$a \leqq x \leqq a + \delta_1$ $\quad$ $|\bar{y}| < c$ $\quad$ bleibt.

Da die Funktion $a_2 \psi(x)$ über alle Grenzen wächst, wenn x gegen a konvergiert, so kann man eine Zahl δ_2 finden, so dass für

$a \leqq x \leqq a + \delta_2$ $\quad$ $|a_2 \psi(x)| > c$ $\quad$ ist.

Wenn nun beispielsweise $\delta_1 < \delta_2$ ist, so bestehen für $x = a + \delta_1$ die beiden Ungleichungen

$$|\bar{y}| < c, \quad |a_2 \psi(x)| > c,$$

welche einen Widerspruch zu der auch bei $x = a + \delta_1$ geltenden Gleichung $\bar{y} = a_2 \psi(x)$ enthalten.

Daher muss $a_2 = 0$ sein, und es ist, zunächst in jedem Intervalle $g_1, +\infty$,

$$\bar{y} = 0.$$

Diese Gleichung besteht auch in jedem Punkte, der dem Punkte $x = a$ beliebig nahe liegt, und infolgedessen auch bei $x = a$ selbst, weil $\bar{y}$ im Punkte $x = a$ stetig ist.

Damit haben wir auch für diesen Fall gezeigt, dass sich der Geltungsbereich der Gleichung $\bar{y} = 0$ über das ganze Grundgebiet erstreckt.

Unser Satz ist vollständig bewiesen.

Wir wenden uns jetzt wieder den Untersuchungen in U § 2 zu. Mit Hilfe derselben Ueberlegungen, welche dort angestellt sind, schliesst man, dass sich immer durch Be-

stimmung einer verfügbaren Konstanten die für das ganze Grundgebiet I giltige Beziehung

$$k(\varphi'\psi - \varphi\psi') = 1$$

herstellen lässt. Es sei nun ξ irgend ein bestimmter Wert von x im Gebiete I; so setzen wir

$$K(x,\xi) = \begin{cases} \varphi(x)\cdot\psi(\xi) & x \leqq \xi \\ \varphi(\xi)\cdot\psi(x) & \xi \leqq x \end{cases}.$$

$K(x,\xi)$ ist im ganzen Intervalle I eine stetige Funktion von x, allerdings bei endlichem a nur dann, wenn $\xi - a$ über einer festen positiven Grenze bleibt, weil für $\xi = a$ $K(x,\xi) = \varphi(a)\cdot\psi(x)$ ist und dieser Ausdruck im Falle $a = fin.$ bei $x = a$ über alle Grenzen wächst; $K(x,\xi)$ ist ferner symmetrisch in x und ξ, und befriedigt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x}\right) - lK(x,\xi) = 0$$

und die Randbedingungen der Funktionen $V(x)$, wenn bei endlichem a $\xi > a$ ist. Die erste Ableitung von $K(x,\xi)$ nach x, nämlich die Grösse $\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x} = K'(x,\xi)$, macht wegen der Identität $k(\varphi'\psi - \varphi\psi') = 1$ bei $x = \xi$ einen Sprung, der durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$K'(x,\xi)\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = \frac{1}{k(\xi)}.$$

Diese Funktion $K(x,\xi)$ wird nachher als Kern einer homogenen Integralgleichung auftreten, deren Eigenfunktionen die Funktionen $V(x)$ sind. Wir wollen darum schon hier die Funktion $K(x,\xi)$ als Kern und die Funktionen $V(x)$ als Eigenfunktionen bezeichnen.

Wir führen jetzt die Voraussetzung (B) des I. Kapitels ein:

(B). Es habe das Integral $\int_a^\infty [K(x,\xi)]^2 d\xi$ für alle Werte von x im Grundgebiete I bestimmte Werte, die alle unter

einer endlichen Konstanten A liegen, und es sei das Doppelintegral $\int_a^\infty\int_a^\infty [K(x,\xi)]^2 dx d\xi$ gleich einer endlichen Konstanten C.

Dann können wir folgende Sätze über quellenmässig dargestellte Funktionen und über die quellenmässige Darstellung willkürlicher Funktionen beweisen:

Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion von x, deren Quadrat sich über das Grundgebiet integrieren lässt. Bilden wir den Ausdruck

$$F(x) = \int_a^\infty K(x,\xi) f(\xi) d\xi,$$

so ist dieses Integral eine im Grundgebiete endliche, eindeutige und stetige Funktion von x, und zwar, wenn a endlich ist, auch bei $x = a$ selbst, während die Ableitung $F'(x)$ wenigstens in jedem Gebiete g_1, g_2 dieselben Eigenschaften hat; $F(x)$ befriedigt ausserdem die Randbedingungen der Eigenfunktionen und des Kernes, und es besteht die Gleichung

$$\frac{d[kF'(x)]}{dx} - l\,F(x) = -f(x).$$

Beweis: Die Funktion $F(x)$ liegt im ganzen Grundgebiete dem absoluten Werte nach unter einer festen Grenze, weil nach der Schwarzschen Ungleichung

$$(F(x))^2 = \left(\int_a^\infty K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi\right)^2 \leqq \int_a^\infty [K(x,\xi)]^2 d\xi \cdot \int_a^\infty f^2(\xi) d\xi$$

$$< A \cdot \int_a^\infty f^2(\xi)\, d\xi$$

ist.

Nach der Bemerkung, die wir an die genannte Ungleichung im § 1 des I. Kapitels geknüpft haben, ist $F(x)$ eine eindeutige Funktion von x.

In den Gleichungen

$$F(x) = \int_a^x K(x,\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^\infty K(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

$$= \psi(x) \int_a^x \varphi(\xi) f(\xi) d\xi + \varphi(x) \int_x^\infty \psi(\xi) f(\xi) d\xi$$

existieren beide Integrale für jeden Wert von x im Grundgebiete. Wenn $a = -\infty$ ist, so sind im ganzen Grundgebiete die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ und $f(x)$ stetig und folglich auch $F(x)$; wenn aber a eine endliche Zahl bedeutet, so gilt dasselbe zunächst für $x > a$; $F(x)$ ist jedoch in diesem Falle auch bei $x = a$ stetig, weil die beiden Summanden von $F(x)$ bei $x = a$ bestimmte endliche Werte besitzen, denen sie zustreben, wenn wir x gegen a konvergieren lassen.

Für $F'(x)$ erhalten wir mit Rücksicht auf die Stetigkeit von $f(x)$ die Gleichung:

$$F'(x) = \psi'(x) \int_a^x \varphi(\xi) f(\xi) d\xi + \varphi'(x) \int_x^\infty \psi(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Funktionen sind in jedem Gebiete g_1, g_2 eindeutig, endlich und stetig; daher gilt dasselbe von $F'(x)$.

$F(x)$ befriedigt die Randbedingungen der Eigenfunktionen und des Kerns. Denn da $\int_a^\infty \int_a^\infty [K(x,\xi)]^2 dx d\xi = C$ ist, so verschwindet das Integral $\int_a^\infty [K(x,\xi)]^2 d\xi$ im Unendlichen und folglich, wegen der obigen Ungleichung, auch $F(x)$; wenn a eine endliche Zahl ist, so bleibt $F(x)$ bei $x = a$ endlich, weil die Ungleichung besteht:

$$(F(a))^2 \leqq \int_a^\infty [K(a,\xi)]\, d\xi \cdot \int_a^\infty f^2(\xi) d\xi,$$

in welcher beide Faktoren der rechten Seite endlich sind.

Um die letzte unserer Behauptungen zu beweisen, gehen wir von der Gleichung aus:

$$F'(x) = \psi'(x)\int_a^x \varphi(\xi)f(\xi)d\xi + \varphi'(x)\int_x^\infty \psi(\xi)f(\xi)d\xi,$$

aus welcher wir die folgenden neuen Gleichungen ableiten können:

$$\begin{aligned}\frac{d[kF'(x)]}{dx} &= \frac{d[k\psi'(x)]}{dx}\int_a^x \varphi(\xi)f(\xi)d\xi \\ &\quad + \frac{d[k\varphi'(x)]}{dx}\int_a^\infty \psi(\xi)f(\xi)d\xi \\ &\quad + k\psi'(x)\varphi(x)f(x) - k\varphi'(x)\psi(x)f(x) \\ &= \int_a^\infty \frac{d[kK'(x,\xi)]}{dx} f(\xi)d\xi - f(x),\end{aligned}$$

oder, da der Kern die Differentialgleichung

$$\frac{d[kK'(x,\xi)]}{dx} - l\,K(x,\xi) = 0$$

befriedigt,

$$\begin{aligned}\frac{d[kF'(x)]}{dx} &= l\int_a^\infty K(x,\xi)f(\xi)d\xi - f(x) \\ &= l\,F(x) - f(x),\end{aligned}$$

woraus unsere letzte Behauptung folgt.

Ferner besteht der Satz: Es sei $\Phi(x)$ eine mit ihren beiden ersten Ableitungen im Grundgebiete stetige Funktion von x, welche denselben Randbedingungen wie die Eigenfunktionen und der Kern unterworfen ist, und das Quadrat der Funktion $f(x) = -\frac{d[k\Phi'(x)]}{dx} + l\,\Phi(x)$ sei über das Grundgebiet integrabel. Dann lässt sich $\Phi(x)$ in folgender Weise quellenmässig darstellen:

$$\Phi(x) = \int_a^\infty K(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$

Beweis: Die Funktion $f(x)$ ist eine stetige Funktion, deren Quadrat sich über das Grundgebiet integrieren lässt; bilden wir daher den Ausdruck

$$F(x) = \int_a^\infty K(x,\xi) f(\xi) d\xi,$$

so lässt sich auf diesen der vorangehende Satz anwenden.

Im Besonderen besteht die Gleichung:

$$\frac{d[kF'(x)]}{dx} - lF(x) = -f(x).$$

Durch Subtraktion derselben von der Gleichung

$$\frac{d[k\Phi'(x)]}{dx} - l\Phi(x) = -f(x),$$

durch welche $f(x)$ definiert ist, folgt die Differentialgleichung:

$$\frac{d[k(\Phi - F)']}{dx} - l(\Phi - F) = 0.$$

Die Funktion $\Phi - F$ tritt so als Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d(ky')}{dx} - ly = 0$$

auf; sie ist im Grundgebiete I stetig, einschliesslich des Punktes $x = a$, wenn a eine endliche Zahl bedeutet, befriedigt die Randbedingungen der Eigenfunktionen und ihre erste Ableitung ist in jedem Gebiete g_1, g_2 stetig. Eine derartige Funktion $\overline{y}$ ist aber, wie wir oben gezeigt haben, im ganzen Grundgebiete identisch gleich Null. Daher folgt:

$$\Phi(x) = F(x) = \int_a^\infty K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

für das ganze Grundgebiet, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Jetzt ergibt sich unmittelbar die Integralgleichung

$$V(x) = \lambda \int_a^\infty K(x,\xi)\, V(\xi)\, d\xi,$$

wenn wir hier die Voraussetzung (A') machen, dass das Quadrat der Funktionen $V(x)$ über das Grundgebiet integrabel sei.

Wir können nämlich die Funktion $\Phi(x) = V(x)$ nach dem letzten Satze quellenmässig darstellen. Wegen der Differentialgleichung

$$\frac{d[kV'(x)]}{dx} - lV(x) = -\lambda V(x)$$

ist dabei $f(x) = \lambda \cdot V(x)$ zu setzen. Wir erhalten so die Integralgleichung

$$V(x) = \lambda \int_a^\infty K(x,\xi)\, V(\xi)\, d\xi,$$

oder, wenn wir mit λ_ν (für $\nu = 0,1,2,\ldots$) die verschiedenen Werte bezeichnen, welche λ annehmen kann, und mit $\varphi_\nu(x)$ die zugehörigen Werte von $V(x)$:

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_\nu \int_a^\infty K(x,\xi)\varphi_\nu(\xi)\, d\xi.$$

Die Lösungen $V(x)$ des Randwertproblems treten also als die zu den Eigenwerten $\lambda = \lambda_\nu$ gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ des Kernes $K(x,\xi)$ auf.

Zugleich sieht man, dass die Voraussetzung (A') nichts anderes ist als die Voraussetzung (A) des I. Kapitels.

§ 13. Die Entwicklung des Kerns und seiner ersten Ableitung nach den Eigenfunktionen.

Nachdem wir im vorangehenden Paragraphen die Integralgleichung

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_\nu \int_a^\infty K(x,\xi)\varphi_\nu(\xi)\, d\xi$$

hergeleitet haben, für deren Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$, wie wir annahmen, die Voraussetzung (A) und für deren Kern die Voraussetzung (B) gelten, können wir zunächst die Eigenfunktionen normieren, d. h. wir können durch Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten bewirken, dass für jedes positive ganzzahlige ν die Gleichung besteht:

$$\int_a^\infty \varphi_\nu^2(x)dx = 1 .$$

Nach den Untersuchungen des § 8 im I. Kapitel lässt sich der iterierte Kern $K^2(x,\xi)$ nach diesen Eigenfunktionen in die Reihe entwickeln:

$$K^2(x,\xi) = \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\cdot\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2} ,$$

welche in dem ganzen Intervalle a, $+\infty$ absolut und gleichmässig konvergiert.

Ferner befriedigt, wie wir im letzten Paragraphen nachgewiesen hatten, das Integral

$$F(x) = \int_a^\infty K(x,r)f(r)dr$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d[kF'(x)]}{dx} - lF(x) = -f(x),$$

wenn $f(x)$ eine stetige Funktion von x ist, deren Quadrat sich von a bis $+\infty$ integrieren lässt.

Nun ist bekanntlich

$$K^2(x,\xi) = \int_a^\infty K(x,r)K(r,\xi)dr.$$

Setzen wir also

$$F(x) = K^2(x,\xi), \qquad f(r) = K(r,\xi),$$

so ist $f(r)$ eine stetige Funktion von r für jeden Wert von ξ, wenn wir bei endlichem a festsetzen, dass $\xi - a$ über einer festen positiven Grenze bleibt, und das Integral $\int_a^\infty f^2(r)dr = \int_a^\infty [K(r,\xi)]^2 dr$ existiert nach Voraussetzung (B) für jeden Wert von ξ im Grundgebiete. Daher folgt unter derselben Einschränkung, unter der die Funktion $f(r)$ stetig ist, die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial K^2(x,\xi)}{\partial x}\right) - lK^2(x,\xi) = -K(x,\xi).$$

Wir fügen zu unseren bisherigen Voraussetzungen (A) bis (C) noch die folgenden drei:

(D). Die beiden Reihen:

$$\sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2} \quad \text{und} \quad \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$$

mögen gleichmässig konvergieren, wenn x und ξ ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchlaufen.

(E). Von den beiden Reihen

$$\sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} \quad \text{und} \quad \sum_\nu^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

möge die erste gleichmässig konvergieren, wenn x und ξ ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchlaufen und dabei $|x-\xi|$ über einer festen Grenze bleibt, die zweite aber für alle Werte von x in jedem Intervalle g_1, g_2.

(F). Unter denselben Voraussetzungen über x und ξ wie unter (E) liege die Grösse

$$\sum_\nu^{0,n} \frac{\varphi_\nu'(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$$

zwischen endlichen, von n, x und ξ unabhängigen Grenzen.

Aus den Annahmen (D) und (E) erschliesst man durch dieselben Argumentationen wie in U § 3 folgende Resultate:

(I). Wenn x und ξ ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchlaufen, so gilt die gleichmässig konvergente Entwicklung

$$K(x,\xi) = \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}.$$

(II). Wenn x und ξ ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchlaufen und wenn ausserdem $|x-\xi|$ über einer festen Grenze bleibt, so gilt die gleichmässig konvergente Entwicklung

$$K'(x,\xi) = \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}.$$

(III). Wenn x ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchläuft, so gilt die gleichmässig konvergente Entwicklung

$$\frac{1}{2}\frac{dK(x,x)}{dx} = \frac{1}{2}[K'(x+0,x) + K'(x-0,x)]$$

$$= \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\varphi_\nu'(x)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}.$$

§ 14. Die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen.

Die Untersuchungen von U § 4 erfahren für unseren Fall nur insofern eine Aenderung, als wir sie wegen der im vorangehenden Paragraphen eingeführten Voraussetzungen (D) und (E) nicht ohne weiteres auf das ganze Grundgebiet $I = a, +\infty$ ausdehnen können, sondern auf Intervalle g_1, g_2 beschränken müssen.

Das Resultat von U § 4 lässt sich dann folgendermassen aussprechen:

Es sei

$$R(x)^{\xi,\eta} = \sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)\, d\alpha\,,$$

und es mögen folgende Voraussetzungen gelten:

Die Zahlen x, ξ und η mögen innerhalb eines Intervalles g_1, g_2 liegen und $\eta - \xi$ über einer festen positiven Grenze bleiben. Die Funktion $f(\alpha)$ sei mit ihren beiden ersten Ableitungen auf der Strecke von ξ bis η stetig.

Dann gelten die beiden Gleichungen:

$$R(\xi)^{\xi,\eta} = \frac{1}{2} f(\xi),$$

$$R(\eta)^{\xi,\eta} = \frac{1}{2} f(\eta),$$

und beide Reihen konvergieren gleichmässig unter den Bedingungen, denen wir ξ und η unterworfen haben.

Die andern Formeln von *U* § 4 gelten auch hier noch teilweise, werden aber zur Ableitung des späteren allgemeinen Resultates nicht gebraucht.

Mit Hilfe des eben ausgesprochenen Satzes lässt sich, ähnlich wie in *U* § 5, der Summenwert der Reihe

$$R(x) = R(x)^{a,+\infty} = \sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{a}^{\infty} f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha) d\alpha$$

berechnen.

$f(x)$ sei eine Funktion mit folgenden Eigenschaften: sie sei im ganzen Grundgebiete eine Funktion von beschränkter Schwankung; ferner mögen sich zwei Zahlen k_1 und k_2 im Innern des Grundgebietes angeben lassen, so dass in den Intervallen a, k_1 und k_2, $+\infty$ die Funktion $f(x)$ mit ihren Ableitungen 1. und 2. Ordnung stetig ist; schliesslich möge $f(x)$ die Randbedingungen der Eigenfunktionen befriedigen und das Quadrat der Funktion

$$p(x) = -\frac{d[kf'(x)]}{dx} + lf(x)$$

über das Grundgebiet integrabel sein.

Durch dieselbe Schlussweise wie in U § 5 gelangen wir jetzt, wenn wir ξ und η auf das Intervall k_1, k_2 beschränken und $\eta - \xi$ über einer festen positiven Grenze bleibt, zu folgenden Resultaten:

Setzt man

$$\Phi(\alpha,n) = \sum_{\nu}^{0,n} \varphi_\nu(\xi)\varphi_\nu(\alpha),$$

so liegt die Grösse

$$\int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha,n)d\alpha$$

zwischen festen, von n, ξ und η unabhängigen Grenzen; ferner gilt die Beziehung

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(\xi) \int_{\xi}^{\eta} \varphi_\nu(\alpha)d\alpha = \lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\eta} \Phi(\alpha,n)d\alpha = \frac{1}{2},$$

und dieser Grenzwert wird gleichmässig angestrebt; schliesslich folgt aus diesen Eigenschaften von $\Phi(\alpha,n)$ nach Jordan, Cours d'Analyse, II, No. 221, die Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\Phi(\alpha,n)d\alpha = \sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(\xi) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2} f(\xi + 0)$$

und die analoge:

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(\eta) \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2} f(\eta - 0).$$

Die beiden letzten Gleichungen liefern für alle Werte von x zwischen k_1 und k_2, bei denen die Grössen $x - k_1$ und $k_2 - x$ über einer festen positiven Grenze bleiben, die Entwicklung:

$$R(x)^{k_1,k_2} = \sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{k_1}^{k_2} f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Nunmehr definieren wir eine Hilfsfunktion $g(\alpha)$ in folgender Weise:

Auf den Strecken von $\alpha = a$ bis $\alpha = k_1$ und von $\alpha = k_2$ bis $\alpha = +\infty$, auf denen $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ und $f''(\alpha)$ stetig sind, sei $g(\alpha) = f(\alpha)$; ferner sei $g(\alpha)$ im ganzen Grundgebiete mit den beiden ersten Ableitungen $g'(\alpha)$ und $g''(\alpha)$ stetig, und es sei $g(x) = f(x)$.

Diese Funktion $g(x)$ ist quellenmässig darstellbar mit Hilfe des Kernes $K(x,\xi)$.

Denn nach Annahme ist $g(x)$ eine im ganzen Grundgebiete mit ihren beiden ersten Ableitungen stetige Funktion von x, welche die Randbedingungen erfüllt, da sie an den Enden des Grundgebietes, nämlich auf den Strecken a, k_1 und k_2, $+\infty$, mit der Funktion $f(x)$ identisch ist und diese die Randbedingungen erfüllt; ferner hat das von a bis $+\infty$ erstreckte Integral über dem Quadrate der Funktion

$$q(x) = -\frac{d[k\,g'(x)]}{dx} + lg(x)$$

einen bestimmten, endlichen Wert. Dieses Integral ist nämlich gleich dem Ausdrucke

$$\int_a^\infty \left(\frac{d[k\,g'(x)]}{dx} - lg(x)\right)^2 dx = \int_a^{k_1} + \int_{k_1}^{k_2} + \int_{k_2}^{\infty}$$

$$= \int_a^{k_1} \left(\frac{d[k\,f'(x)]}{d(x)} - lf(x)\right)^2 dx$$

$$+ \int_{k_1}^{k_2} \left(\frac{d[k\,g'(x)]}{dx} - lg(x)\right)^2 dx$$

$$+ \int_{k_2}^{\infty} \left(\frac{d[k\,f'(x)]}{dx} - lf(x)\right)^2 dx$$

Das erste und letzte dieser Integrale existieren, weil wir vorausgesetzt haben, dass das Quadrat der Funktion

$p(x) = -\frac{d[kf'(x)]}{dx} + lf(x)$ von a bis $+\infty$ integrabel sei; ebenso existiert aber auch das zweite Integral der rechten Seite, weil k_1 und k_2 endliche Zahlen sind und der Integrand eine stetige Funktion von x ist.

Mithin besitzt das Integral $\int_a^\infty q^2(x)dx$ in der Tat einen bestimmten, endlichen Wert.

Die Funktion $g(x)$ hat daher alle Eigenschaften, welche nach § 12 zur quellenmässigen Darstellbarkeit erforderlich sind.

Folglich lässt sich $g(x)$ quellenmässig darstellen in der Form

$$g(x) = \int_a^\infty K(x,\xi)q(\xi)d\xi.$$

Da nun $q(x)$ eine stetige Funktion von x und das Quadrat von $q(x)$ über das Grundgebiet integrabel ist, so kann $g(x)$ nach dem allgemeinen Entwicklungssatze des I. Kapitels (§ 9) nach den Eigenfunktionen in die im ganzen Grundgebiete gleichmässig konvergente Reihe entwickelt werden:

$$g(x) = \sum_\nu^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^\infty g(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha.$$

Andererseits gilt, wenn x dem Inneren des Intervalles k_1, k_2 angehört, wie oben für die Funktion $f(x)$, die Entwicklung

$$g(x) = \sum_\nu^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{k_1}^{k_2} g(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha;$$

denn die Reihe auf der rechten Seite ist der Ausdruck $R(x)^{k_1,k_2}$, gebildet für die Funktion $g(x)$.

Durch Subtraktion erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^{k_1} g(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha + \sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{k_2}^{\infty} g(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha = 0.$$

Da aber in den Integrationsintervallen $g(\alpha) = f(\alpha)$ ist, so geht diese in die folgende über:

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^{k_1} f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha + \sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_{k_2}^{\infty} f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha = 0$$

oder

$$R(x)^{a,k_1} + R(x)^{k_2,\infty} = 0.$$

Die Addition der letzten Gleichung zu der oben erhaltenen:

$$R(x)^{k_1,k_2} = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

liefert schliesslich die Formel:

$$R(x) = R(x)^{a,+\infty} = \sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^{\infty} f(\alpha)\varphi_\nu(\alpha)d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)].$$

Diese Reihenentwicklung gilt für alle Werte von x zwischen k_1 und k_2, bei denen die Grössen $x-k_1$ und k_2-x über einer festen positiven Grenze bleiben, also im Intervalle $k_1 + c \leqq x \leqq k_2 - c$, wo c eine angebbare positive Konstante ist.

Erinnern wir uns der am Anfange dieses Kapitels gegebenen Definition der Zahlen g_1 und g_2, so sehen wir, dass wir die Zahl k_1 durch jede von den Zahlen g_1, die kleiner ist als k_1, ersetzen können, und ebenso k_2 durch jede von den Zahlen g_2, die grösser ist als k_2. Dadurch wird an den durchgeführten Ueberlegungen nichts geändert. Die letzte Entwicklung, welche zunächst für das Intervall $k_1 + c \leqq x \leqq k_2 - c$ als giltig nachgewiesen war, besteht also für jedes Intervall $g_1 + c \leqq x \leqq g_2 - c$; und da $g_1 + c$ zugleich eine Zahl g_1 und $g_2 - c$ zugleich eine Zahl g_2 ist, so besteht sie für jedes Intervall g_1, g_2.

Nach dem am Anfange des Kapitels bewiesenen Satze erstreckt sich daher ihr Geltungsbereich, wenn $a = -\infty$ ist, auf das ganze Grundgebiet, und wenn a endlich ist, auf jedes Gebiet g_1, $+\infty$.

Das Resultat dieses Kapitels lässt sich folgendermassen aussprechen:

Es sei ein Randwertproblem von der Form und unter den Voraussetzungen (C) vorgelegt. Dann konstruieren wir, wie in § 12 angegeben, eine Funktion $K(x,\xi)$. Für diese gelte Voraussetzung (B), für die Lösungen des Randwertproblems die Voraussetzung (A'). Jetzt lässt sich eine Integralgleichung herstellen, deren Kern die Funktion $K(x,\xi)$ und deren Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ die Lösungen des Randertproblems sind. Diese Eigenfunktionen befriedigen die Voraussetzung (A). Für die bilineare Reihe mögen die Eigenschaften (D), (E) und (F) gesichert sein.

Dann haben wir für die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ folgenden Satz:

Es sei $f(x)$ eine willkürliche, im Grundgebiete $I = a, +\infty$ definierte Funktion von x. Sie sei im ganzen Grundgebiete eine Funktion von beschränkter Schwankung; ausserdem aber sei sie einerseits oberhalb einer angebbaren Grenze, andererseits, wenn $a = -\infty$ ist, auch unterhalb einer angebbaren Grenze, und wenn a endlich ist, vom Punkte $x = a$ an eine beliebig kleine Strecke weit, mit ihren beiden ersten Ableitungen stetig. $f(x)$ befriedige ferner die Randbedingungen der Eigenfunktionen, und das Quadrat der Funkion $p(x) = -\frac{d[kf(x)]}{dx} + lf(x)$ sei über das Grundgebiet intergrabel. Für eine solche Funktion $f(x)$ besteht die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \varphi_\nu(x) \int_a^\infty f(a)\varphi_\nu(a)da = \frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)],$$

und diese Entwicklung gilt, wenn $a = -\infty$ ist, im ganzen Grundgebiete, wenn a aber endlich ist, im ganzen Grundgebiete mit Ausnahme des Punktes $x = a$.

III. Kapitel.

Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen.

Die Probleme, willkürliche Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen zu entwickeln, lassen sich jetzt auf Grund der im I. und II. Kapitel durchgeführten Untersuchungen leicht lösen.

Wir werden in diesem Kapitel zeigen, dass bei beiden Problemen die Voraussetzungen (A)—(F) erfüllt sind, und werden dann unmittelbar aus dem allgemeinen Entwicklungssatze des letzten Kapitels besondere Entwicklungssätze für die Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen gewinnen.

Teil 1. Die Hermiteschen Orthogonalfunktionen.

§ 15. Die Integralgleichung.

Die Hermiteschen Polynome $P_n(x)$ sind im Grundgebiete $I = -\infty, +\infty$ durch die Differentialgleichung

$$P_n''(x) - 2xP_n'(x) + 2nP_n(x) = 0$$

definiert, in welcher $n = 0,1,2,3\ldots$ zu setzen ist. Aus dieser Gleichung erhalten wir, indem wir $P_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\ \varphi_n(x)$ einführen, für die Hermiteschen Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$ die folgende Differentialgleichung:

$$\varphi_n''(x) + (2n + 1 - x^2)\varphi_n(x) = 0,$$

oder, wenn $\lambda_n = 2(n + 1)$ gesetzt wird,

$$\varphi_n''(x) + (\lambda_n - 1 - x^2)\ \varphi_n(x) = 0.$$

Die Funktionen $\varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$ verschwinden im Unendlichen, weil $P_n(x)$ ein Polynom n. Grades in x ist. Die Randbedingungen lauten also

$$\varphi_n(x) \Big|^{x=\pm\infty} = 0.$$

Damit haben wir ein Randwertproblem hergestellt, welches der Voraussetzung (C) des II. Kapitels entspricht. Es ist nämlich dort zu setzen:

$$V = \varphi_\nu(x) = \varphi_n(x), \qquad k = 1, \qquad \lambda = \lambda_\nu = \lambda_n,$$
$$l = 1 + x^2, \qquad a = -\infty.$$

Dass die Werte $\lambda_n = 2(n+1)$ für $n = 0,1,2,3\ldots.$ alle mit ihrer ersten Ableitung stetigen Lösungen des Randwertproblems liefern, dass also das System der Eigenfunktionen vollständig ist und dass im Besonderen der Wert $\lambda_n = 0$ nicht vorkommt, wird in § 17 gezeigt werden.

Jetzt können wir zwei Lösungen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' - (1 + x^2)\, y = 0$$

finden, von denen die erste die Randbedingung der Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ am unteren Ende des Grundgebietes, bei $x = -\infty$, die zweite diejenige am oberen Ende desselben, bei $x = +\infty$, erfüllt: das allgemeine Integral der Differentialgleichung ist nämlich der Ausdruck

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \left(c_1 + c_2 \int_c^x e^{-\alpha^2} d\alpha \right),$$

wobei c, c_1, c_2 irgendwelche Konstante sind.

Wir setzen also

$$\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(a_1 + a_2 \int_a^x e^{-\alpha^2} d\alpha \right)$$

$$\psi(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(b_1 + b_2 \int_b^x e^{-\alpha^2} d\alpha \right).$$

Da $\varphi(x)\big|x = -\infty = \psi(x)\big|x = +\infty = 0$ sein soll, so folgt:

$$\varphi(x) = a_2 e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^x e^{-\alpha^2} d\alpha, \qquad \psi(x) = b_2 e^{\frac{x^2}{2}} \int_{+\infty}^x e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Nun nehmen zwar bei $x = -\infty$ $\varphi(x)$ und bei $x = +\infty$ $\psi(x)$ die unbestimmten Formen $\infty \cdot 0$ an; zur Berechnung des wahren Wertes solcher scheinbar unbestimmten Formen haben aber Stolz, Rouquet[1]) und Kneser[2]) zwei Lemmata aufgestellt, die sich in folgendem zusammenfassen lassen:

Lemma: Werden die beiden Funktionen $\psi(x)$ und $\vartheta(x)$ für $x = \infty$ gleichzeitig entweder unendlich gross oder gleich Null, so kann man den wahren Wert des Quotienten $\frac{\psi(x)}{\vartheta(x)}$ für $x = \infty$ nach der gewöhnlichen Methode berechnen, nämlich nach der Regel:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{\vartheta(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)},$$

wenn für grosse Werte von x die Funktionen $\psi(x)$ und $\vartheta(x)$ samt ihren ersten Ableitungen endlich und stetig sind, wenn ferner $\vartheta'(x)$ für grosse Werte von x im ersten Falle beständig positiv, im zweiten Falle beständig negativ ist und wenn der Quotient $\frac{\psi'(x)}{\vartheta'(x)}$ bei unbegrenzt wachsenden Werten von x einem bestimmten Grenzwerte zustrebt.

Mit Hilfe dieses Lemmas folgt:

$$\lim_{x=-\infty} xe^{x^2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \lim_{x=-\infty} \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\, d\alpha}{\frac{e^{-x^2}}{x}}$$

$$= \lim_{x=-\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{-2x^2-1}{x^2}\, e^{-x^2}}$$

$$= -\lim_{x=-\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2},$$

[1]) Math. Annal., Bd 15, p. 556.
[2]) Math. Annal., Bd. 42, p. 426.

und ebenso

$$\lim_{x=+\infty} xe^{x^2} \int_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2} d\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Aus diesen beiden Formeln ergibt sich, dass in der Tat

$$\varphi(x) \Big|^{x=-\infty} = 0 \qquad \psi(x) \Big|^{x=+\infty} = 0$$

ist.

Wenn nun ξ ein beliebiger fester Wert von x ist, so haben wir nach § 12 des II. Kapitels den Kern $K(x,\xi)$ durch folgende Gleichung zu definieren:

$$K(x,\xi) = \begin{cases} \varphi(x)\psi(\xi) & x \leqq \xi \\ \varphi(\xi)\psi(x) & \xi \leqq x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_2 b_2 e^{\frac{x^2+\xi^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2} d\alpha \cdot \int_{+\infty}^{\xi} e^{-\alpha^2} d\alpha & x \leqq \xi \\ a_2 b_2 e^{\frac{\xi^2+x^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\alpha^2} d\alpha \cdot \int_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2} d\alpha & \xi \leqq x. \end{cases}$$

Die Konstante $a_2 b_2$ ist so zu bestimmen, dass

$$\varphi'\psi - \varphi\psi' = \frac{1}{k} = 1$$

ist, d. h. es muss sein:

$$a_2 b_2 \left\{ \left(xe^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2} d\alpha + e^{-\frac{x^2}{2}} \right) e^{\frac{x^2}{2}} \int_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2} d\alpha \right.$$

$$\left. - e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2} d\alpha \left(xe^{\frac{x^2}{2}} \int_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2} d\alpha + e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \right\} = 1,$$

$$a_2 b_2 \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1,$$

$$a_2 b_2 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Wir erhalten also

$$K(x,\xi)=\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{\frac{x^2+\xi^2}{2}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \cdot \int\limits_{+\infty}^{\xi} e^{-\alpha^2}\, d\alpha & x \leqq \xi \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{\frac{\xi^2+x^2}{2}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \cdot \int\limits_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\, d\alpha & \xi \leqq x. \end{cases}$$

Diese Funktion $K(x,\xi)$ ist symmetrisch in x und ξ, sie ist stetig, während ihre erste Ableitung nach x bei $x=\xi$ einen Sprung von der Grösse $\frac{1}{k}=1$ macht, und sie verschwindet im Unendlichen.

Für $K(x,\xi)$ gilt ferner die Voraussetzung (B) des I. Kapitels: Das Integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[K(x,\xi)]^2\, d\xi$ besitzt für alle Werte von x im Grundgebiete bestimmte Werte, die alle unter einer endlichen Konstanten A liegen und das Doppelintegral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[K(x,\xi)]^2\, dx d\xi$ ist gleich einer endlichen Konstanten C.

Beweis: Es ist

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[K(x,\xi]^2\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{x}[K(x,\xi)]^2\, d\xi + \int\limits_{x}^{+\infty}[K(x,\xi)]^2\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\Bigg\{ e^{x^2}\left(\int\limits_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\, d\alpha\right)^2 \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\xi^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-\alpha^2}\, d\alpha\right)^2 d\xi$$

$$+ e^{x^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\, d\alpha\right)^2 \cdot \int\limits_{x}^{+\infty} e^{\xi^2}\left(\int\limits_{+\infty}^{\xi} e^{-\alpha^2}\, d\alpha\right)^2 d\xi \Bigg\}$$

Nun hatten wir oben die Relationen nachgewiesen:

$$\lim_{x=-\infty} xe^{x^2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = -\frac{1}{2},\quad \lim_{x=+\infty} xe^{x^2}\int_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Daher sind für jeden endlichen Wert von x die Summanden der rechten Seite endlich und bestimmt, weil die Integranden in jedem endlichen Intervalle integrabel sind und im Unendlichen in höherer als der ersten Ordnung verschwinden.

Bei $x = \pm\infty$ werden die Werte der Summanden unbestimmt; wir können dieselben aber mit Hilfe des oben angeführten Lemmas berechnen.

Wir erhalten beispielsweise für $x = +\infty$ die Gleichungen:

$$\lim_{x=+\infty} e^{x^2}\left(\int_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{\xi^2}\left(\int_{-\infty}^{\xi} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right)^2 d\xi$$

$$= \lim_{x=+\infty} \left(xe^{x^2}\int_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right)^2 \cdot \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{\xi^2}\left(\int_{-\infty}^{\xi} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right)^2 d\xi}{x^2 e^{x^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x=+\infty} \frac{e^{x^2}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right)^2}{(2x^3+2x)\,e^{x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{8}\lim_{x=+\infty} \frac{1}{x^3}.$$

$$\lim_{x=+\infty} e^{x^2}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right)^2 \cdot \int_{x}^{+\infty} e^{\xi^2}\left(\int_{+\infty}^{\xi} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right)^2 d\xi =$$

$$= \pi \lim_{x=+\infty} \frac{\int_{x}^{+\infty} e^{\xi^2}\left(\int_{+\infty}^{\xi} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right)^2 d\xi}{e^{-x^2}}$$

$$= \pi \lim_{x=+\infty} \frac{-e^{x^2}\left(\int_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2} d\alpha\right)^2}{-2x\, e^{-x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{x=+\infty} \left(x e^{x^2} \int_{+\infty}^{x} e^{-\alpha^2} d\alpha \right)^2 \frac{1}{x^3}$$

$$= \frac{\pi}{8} \lim_{x=+\infty} \frac{1}{x^3}.$$

Folglich ist $\lim_{x=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [K(x,\xi)]^2 d\xi = \frac{\pi}{4} \lim_{x=+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$:

das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} [K(x,\xi)]^2 d\xi$ verschwindet bei $x = +\infty$ wie $\frac{1}{x^3}$.

Dasselbe ergibt sich für $x = -\infty$.

Demnach besitzt das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} [K(x,\xi)]^2 \, d\xi$ für alle Werte von x im Gebiete $-\infty$, $+\infty$ bestimmte Werte, welche alle unter einer endlichen Konstanten A liegen. Zugleich erkennt man, dass dieses Integral in jedem endlichen Gebiete nach x integrabel ist; wegen der Art seines Verschwindens im Unendlichen muss infolgedessen das Doppelintegral $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [K(x,\xi)]^2 dx d\xi$ gleich einer endlichen Konstanten C sein.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Für die Lösungen $\varphi_n(x)$ des Randwertproblems gilt die Voraussetzung (A') des II. Kapitels (§ 12). Denn es ist[1])

---

[1]) Hermite, Sur un nouveau développement en série des fonctions. Comptes rendus, T. LVIII, p. 96, 267.

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P_n^2(x)dx = 2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}.$$

Daher können wir sofort aus dem II. Kapitel die Integralzeichnung entnehmen:

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,\xi)\varphi_n(\xi)d\xi.$$

Die Hermiteschen Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot P_n(x)$ erscheinen als die zu den Eigenwerten $\lambda_n = 2(n+1)$ gehörigen Eigenfunktionen des Kernes $K(x,\xi)$.

Da für diese Eigenfunktionen die Annahme (A) des I. Kapitels gerechtfertigt ist, so können wir sie normieren und wollen von jetzt an unter den $\varphi_n(x)$ wieder die normierten Eigenfunktionen verstehen.

§ 16. Die Reihen

$$\sum \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda^2_n}, \quad \sum \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n},$$
$$\sum \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}, \quad \sum \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n};$$

Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen Orthogonalfunktionen.

Wir haben nun noch die Voraussetzungen (D), (E) und (F) des II. Kapitels als erfüllt nachzuweisen, d. h. wir haben zu zeigen, dass die Reihen

$$\sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2}, \quad \sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}, \quad \sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$$

gleichmässig konvergieren, wenn x und ξ ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchlaufen, dass dagegen die Reihe

$$\sum_{n}^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$$

gleichmässig konvergiert und die Summe

$$\sum_{n}^{0,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$$

zwischen festen, von m, x und ξ unabhängigen Grenzen bleibt, wenn x und ξ ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchlaufen und ausserdem $|x-\xi|$ über einer festen Grenze bleibt.

Um dies nachweisen zu können, schicken wir die folgenden von W. Stekloff[1]) angegebenen Formeln voraus, mit Hilfe deren man die Funktionen $\varphi_n(x)$ und $\varphi_n'(x)$ abschätzen kann.

Nach Stekloff ist[2]), wenn wir vorübergehend mit $\varphi_n^*(x)$ die noch nicht normierten Eigenfunktionen bezeichnen:

$$(1) \qquad \varphi_n^*(x) = A_n' cosx\sqrt{2n} + \frac{B_n'}{\sqrt{2n}} sinx\sqrt{2n}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_0^x (\alpha^2-1)\varphi_n^*(\alpha) sin\sqrt{2n}(\alpha-x)d\alpha,$$

und hierin ist zu setzen[3]):
für grades n:

$$A_n' = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . (n-1), \quad B_n' = 0;$$

für ungrades n:

$$A_n' = 0, \quad B_n' = (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . n^4).$$

---

[1]) S. die in der Einleitung zitierte Abhandlung.
[2]) l. c., § 3, Gleichung 17_1.
[3]) l. c., § 12, Gleichung 54 und 55.
[4]) Bei Stekloff steht an dieser Stelle irrtümlicherweise $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_n^*(x)]^2 dx, \quad \frac{\varphi_n^*(x)}{\sqrt{I_n}} = \varphi_n(x),$$

$$\frac{A_n' \sqrt[4]{n}}{\sqrt{I_n}} = C_n, \quad \frac{B_n' \sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n}\sqrt{I_n}} = D_n,$$

$$\int_0^x (\alpha^2 - 1)\varphi_n(\alpha) \sin \sqrt{2n}\,(\alpha - x) d\alpha = I(x).$$

Dann bedeuten die $\varphi_n(x)$ die normierten Eigenfunktionen, d. h. es ist $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^2(x) dx = 1$, und wir erhalten durch Division der Gleichung (1) mit $\sqrt{I_n}$ die folgende:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} (C_n \cos x \sqrt{2n} + D_n \sin x \sqrt{2n}) - \frac{1}{\sqrt{2n}} I(x) \tag{2}$$

Da $I_n = 2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}$ ist, so haben die Koeffizienten C_n und D_n folgende Werte:
für grades n:

$$C_n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{n-1}{n}} \sqrt{n}, \tag{3}$$

$D_n = 0$;
und für ungrades n:
$C_n = 0$,

$$D_n = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2)\sqrt{n}}{\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}} = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{n-2}{n-1}} \sqrt{n}. \tag{4}$$

Ueber die absoluten Beträge von C_n, D_n und $I(x)$ lässt sich folgendes aussagen: es ist
für grades n:

$$|C_n| = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n}}\sqrt{n}.$$

Nun bestehen aber für alle Werte von n die Ungleichungen:

$$n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1,$$

$$1 < \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}},$$

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{\sqrt{n+2}};$$

mithin ist

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{\sqrt{n}} < \lim_{n=\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

nach der Formel von Wallis. Daher wird

$$(5) \qquad |C_n| < \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} < 1.$$

Ebenso erhalten wir
für ungrades n:

$$|D_n| = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{n-2}{n-1}\sqrt{n}}.$$

Es ist aber

$$\frac{\sqrt{(n-2)n}}{n-1} < 1 \text{ oder } \frac{n-2}{n-1}\sqrt{n} < \sqrt{n-2},$$

und daher

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{n-2}{n-1}\sqrt{n} < \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{n-4}{n-3}\sqrt{n-2}$$

$$< \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{n-6}{n-5}\sqrt{n-4} < \ldots < \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Mithin wird

$$|D_n| < \sqrt[4]{\frac{3}{4\pi}} < 1. \tag{6}$$

Schliesslich liefert die Schwarzsche Ungleichung, angewandt auf das Integral $I(x)$, die folgenden Ungleichungen:

$$I^2(x) \leqq \int_0^x (\alpha^2-1)^2 \sin^2 \sqrt{2n}(\alpha-x)d\alpha \cdot \int_0^x \varphi_n^2(\alpha)\, d\alpha$$

$$\leqq \int_0^x (\alpha^2-1)^2 d\alpha = \frac{x^5}{5} + x - \frac{2}{3}x^3 = X,$$

$$|I(x)| < \sqrt{X}. \tag{7}$$

Differenziert man Gleichung (2) nach x, so erhält man für $\varphi_n'(x)$ die Gleichung:

$$\varphi_n'(x) = \sqrt{2}\sqrt[4]{n}\,(-C_n \sin x\sqrt{2n} + D_n \cos x\sqrt{2n}) + \bar{I}(x), \tag{8}$$

und hierbei ist:

$$\bar{I}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2n}}\frac{dI(x)}{dx}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2n}}\frac{d}{dx}\left\{\cos x\sqrt{2n}\int_0^x (\alpha^2-1)\varphi_n(\alpha)\sin\alpha\sqrt{2n}\,d\alpha - \sin x\sqrt{2n}\int_0^x (\alpha^2-1)\varphi_n(\alpha)\cos\alpha\sqrt{2n}\,d\alpha\right\}$$

$$= \sin x\sqrt{2n}\int_0^x (\alpha^2-1)\varphi_n(\alpha)\sin\alpha\sqrt{2n}\,d\alpha + \cos x\sqrt{2n}\int_0^x (\alpha^2-1)\varphi_n(\alpha)\cos\alpha\sqrt{2n}\,d\alpha$$

$$= \int_0^x (\alpha^2-1)\varphi_n(\alpha)\cos\sqrt{2n}(\alpha-x)d\alpha.$$

Daraus ergibt sich für $\bar{I}(x)$, ebenso wie bei $I(x)$, die Ungleichung:

$$|I(x)| < \sqrt{X}. \tag{9}$$

Aus den Gleichungen (2) und (8) und den Ungleichungen (5), (6), (7), (9) folgt, da $\lambda_n = 2(n+1)$ ist, dass die beiden Reihen

$$\sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2}, \qquad \sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$$

gleichmässig konvergieren, wenn x und ξ irgend ein Intervall g_1, g_2 durchlaufen.

Das war die Voraussetzung (D).

Jetzt gehen wir an die Untersuchung der Reihen

$$\sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}, \qquad \sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$$

und der Summe

$$\sum_n^{0,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

Der Summand in seiner allgemeinen Form $\frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$ kann nach (2) und (8) folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} = \frac{1}{2(n+1)}\left[\sqrt{2}\sqrt[4]{n}(-C_n \sin x\sqrt{2n} + D_n \cos x\sqrt{2n}) + \bar{I}(x)\right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[4]{n}}(C_n \cos\xi\sqrt{2n} + D_n \sin\xi\sqrt{2n}) - \frac{1}{\sqrt{2n}} I(\xi)\right].$$

Wir beschränken x und ξ auf ein beliebiges Intervall g_1, g_2. Ferner wollen wir den Buchstaben ψ einführen als Symbol für Funktionen der beiden Variablen x und ξ und des Summationsindexes, die nicht genauer berechnet werden sollen, von denen man aber weiss, dass sie, solange x und ξ innerhalb des Intervalles g_1, g_2 verbleiben, für alle Werte des Summationsindexes dem absoluten Betrage nach unter

einer festen, von diesem unabhängigen, endlichen positiven Zahl liegen.

Dann bekommen wir wegen der Ungleichungen (5), (6), (7), (9) für den Summanden $\frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$ den Ausdruck:

$$\frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} = -\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}\left[C_n^2 \cdot \sin x\sqrt{2n}\cdot\cos\xi\sqrt{2n}\right.$$

$$-D_n^2\cdot\cos x\sqrt{2n}\cdot\sin\xi\sqrt{2n}$$

$$\left.-C_nD_n(\cos x\sqrt{2n}\cdot\cos\xi\sqrt{2n}-\sin x\sqrt{2n}\cdot\sin\xi\sqrt{2n})\right]+\frac{\psi}{\sqrt[4]{n}\sqrt{n}}.$$

Jetzt sei m eine positive ganze ungrade Zahl. In der endlichen Summe $\sum_n^{2,m}\frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$ denken wir uns jedes Glied mit gradem Index n mit dem folgenden mit ungradem Index zusammengefasst, d. h. wir schreiben:

$$\sum_n^{2,m}\frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} = \sum_k^{1,\frac{m-1}{2}}\left\{\frac{\varphi_{2k}'(x)\varphi_{2k}(\xi)}{\lambda_{2k}}+\frac{\varphi_{2k+1}'(x)\varphi_{2k+1}(\xi)}{\lambda_{2k+1}}\right\}$$

und setzen hierin noch

$$\frac{\varphi_{2k}'(x)\varphi_{2k}(\xi)}{\lambda_{2k}}+\frac{\varphi_{2k+1}'(x)\varphi_{2k+1}(\xi)}{\lambda_{2k+1}} = u_k,$$

so dass

$$\sum_n^{2,m}\frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} = \sum_k^{1,\frac{m-1}{2}} u_k$$

wird.

Da für grades n $D_n = 0$ und für ungrades n $C_n = 0$ ist, so gilt für den Summanden u_k die Gleichung:

$$u_k = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2k+1}C_{2k}^2\cdot\sin x\sqrt{4k}\cdot\cos\xi\sqrt{4k}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2k+2}D_{2k+1}^2\cdot\cos x\sqrt{4k+2}\cdot\sin\xi\sqrt{4k+2}\right\}+\frac{\psi}{\sqrt[4]{k}\sqrt{k}}.$$

Wir setzen

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k(2k+1)}$$

und

$$\frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k(2k+2)};$$

dann können wir wegen der Ungleichungen (5) und (6) der Grösse u_k folgende Gestalt geben:

$$u_k = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{C_{2k}^2}{2k}\sin x\sqrt{4k}\cdot\cos\xi\sqrt{4k} - \frac{D_{2k+1}^2}{2k}\cos x\sqrt{4k+2}\cdot\sin\xi\sqrt{4k+2}\right\} + \frac{\psi}{k\sqrt{k}+k^2}.$$

Nach (3) und (4) ist aber:

$$\frac{D_{2k+1}^2}{C_{2k}^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\sqrt{2k+1}}{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\sqrt{2k}} = \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\varepsilon_k,$$

$$D_{2k+1}^2 = C_{2k}^2\,(1+\varepsilon_k).$$

Dabei bestehen für ε_k die Beziehungen:

$$0 < \varepsilon_k = \sqrt{\frac{2k+1}{2k}} - 1 = \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}}{\sqrt{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2k}\,(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k})} < \frac{1}{\sqrt{2k}\cdot 2\sqrt{2k}} < \frac{1}{k}.$$

Infolge dieser Ergebnisse geht u_k in den Ausdruck über:

$$u_k = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{C_{2k}^2}{2k}(\sin x\sqrt{4k}\cdot\cos\xi\sqrt{4k} - \cos x\sqrt{4k+2}\sin\xi\sqrt{4k+2})\right\} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\varepsilon_k C_{2k}^2}{k}\cos x\sqrt{4k+2}\cdot\sin\xi\sqrt{4k+2} + \frac{\psi}{k\sqrt{k}+k^2}.$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{C_{2k}^2}{2k}\left(\sin x\sqrt{4k}\cdot\cos\xi\sqrt{4k} - \cos x\sqrt{4k+2}\cdot\sin\xi\sqrt{4k+2}\right)\right\}$$

$$+\frac{\psi}{k\sqrt{k}+k^2}$$

wegen (5).

Die Differenz in der runden Klammer wollen wir auf die Form $\sin(x-\xi)\sqrt{4k}$ bringen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\cos x\sqrt{4k+2} = \cos x\sqrt{4k} + \delta_k(x)$$

$$\sin\xi\sqrt{4k+2} = \sin\xi\sqrt{4k} + \Delta_k(\xi)$$

und schätzen die Grössen $\delta_k(x)$ und $\Delta_k(\xi)$ ab; es ist

$$\delta_k(x) = \cos x\sqrt{4k+2} - \cos x\sqrt{4k} = -x\int_{4k}^{4k+2}\frac{\sin x\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}\,d\alpha,$$

$$\Delta_k(\xi) = \sin\xi\sqrt{4k+2} - \sin\xi\sqrt{4k} = \xi\int_{4k}^{4k+2}\frac{\cos\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}\,d\alpha,$$

folglich

$$|\delta_k(x)| \leqq |x|\int_{4k}^{4k+2}\frac{d\alpha}{2\sqrt{\alpha}} = |x|\left(\sqrt{4k+2} - \sqrt{4k}\right)$$

$$= \frac{2|x|}{\sqrt{4k+2}+\sqrt{4k}} < \frac{|x|}{\sqrt{k}}.$$

Genau ebenso ergibt sich die Ungleichung

$$|\Delta_k(\xi)| < \frac{|\xi|}{\sqrt{k}}.$$

Wir führen $\delta_k(x)$ und $\Delta_k(\xi)$ in u_k ein:

$$u_k = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{C_{2k}^2}{2k}\left[\sin x\sqrt{4k}\cdot\cos\xi\sqrt{4k}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\cos x\sqrt{4k}+\delta_k(x)\right)\ \left(\sin\xi\sqrt{4k}+\Delta_k(\xi)\right)\right]\right\} + \frac{\psi}{k\sqrt{k}+k^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{C_{2k}^2}{k} \sin(\xi - x)\sqrt{4k} + \frac{\psi}{k\sqrt{k} + k^2 + k\sqrt{k}}.$$

Nach den der Ungleichung (5) vorangehenden Formeln nähert sich C_{2k}^2 bei unbegrenzt wachsendem k dem Werte $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ an. Um über die Abhängigkeit dieser Annäherung vom Index k ein klares Bild zu erhalten, schätzen wir die Differenz zwischen $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ und C_{2k}^2 auf folgende Weise ab: nach Gleichung (3) ist

$$C_{2k}^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{\sqrt{2k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} a_k,$$

wenn

$$a_k = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{\sqrt{2k}}$$

gesetzt wird.

Aus der letzten Gleichung folgt ohne weiteres die Beziehung:

$$a_{k+1} = a_k \frac{2k+1}{\sqrt{2k(2k+2)}}.$$

Die Grössen a_k sind positiv und nehmen bei wachsendem k beständig zu, weil $\frac{2k+1}{\sqrt{2k(2k+2)}} > 1$ ist, wie wir schon beim Beweise der Ungleichung (5) gezeigt haben. Setzen wir also

$$a_{k+1} - a_k = a_k \eta_k,$$

so gelten für η_k die Relationen

$$0 < \eta_k = \frac{2k+1}{\sqrt{2k(2k+2)}} - 1 = \frac{2k+1-\sqrt{2k(2k+2)}}{\sqrt{2k(2k+2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k(2k+2)}(2k+1+\sqrt{2k(2k+2)})} < \frac{1}{k^2}.$$

Nun ist für jedes positive ganzzahlige i

$$a_{k+i}-a_k=(a_{k+1}-a_k)+(a_{k+2}-a_{k+1})+\ldots+(a_{k+i}-a_{k+i-1})$$
$$=a_k\,\eta_k+a_{k+1}\,\eta_{k+1}+\ldots+a_{k+i-1}\,\eta_{k+i-1}.$$

Nach der der Ungleichung (5) vorangehenden Formel ist aber

$$a_k<\lim_{k=\infty} a_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

und infolgedessen

$$a_{k+i}-a_k<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(\eta_k+\eta_{k+1}+\ldots+\eta_{k+i-1})$$
$$<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(k+i-1)^2}\right)$$
$$<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_n^{k,\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Eine geometrische Betrachtung des Integrals $\int_{k-1}^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha^2}$ lehrt ohne Schwierigkeit, dass die Reihe $\sum_n^{k,\infty}\frac{1}{n^2}$ der Ungleichung unterworfen ist;

$$\sum_n^{k,\infty}\frac{1}{n^2}<\int_{k-1}^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{k-1}.$$

Mithin ergibt sich:

$$0<a_{k+i}-a_k<\frac{1}{k-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Die Grösse $a_{k+i}-a_k$ ist also zwischen gewissen, von i unabhängigen Grenzen eingeschlossen. Lassen wir i unbegrenzt wachsen, so kann die betrachtete Grösse keine dieser Grenzen überschreiten. Da aber für $i=\infty$ a_{k+i} in den Grenzwert $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ übergeht, so erhalten wir das Resultat:

$$0 < \sqrt{\frac{2}{\pi}} - a_k \leqq \frac{1}{k-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

und folglich

$$C_{2k}^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - a_k\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{\pi} - \vartheta_k,$$

wobei

$$0 < \vartheta_k = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} - a_k}{\sqrt{\pi}} \leqq \frac{1}{k-1}\,\frac{\sqrt{2}}{\pi} \qquad \text{ist.}$$

Setzen wir dies in u_k ein, so gelangen wir zu folgenden Gleichungen:

$$u_k = \frac{1}{2\pi}\,\frac{sin(\xi - x)}{k}\sqrt{4k} + \frac{\psi}{k\sqrt[4]{k} + k^2 + k\sqrt{k}},$$

$$(10)\qquad \sum_n^{2,m} \frac{\varphi_n'(x)\,\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} = \sum_k^{1,\frac{m-1}{2}} u_k = \frac{1}{2\pi}\sum_k^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{sin(\xi - x)}{k}\sqrt{4k} + \sum_k^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{\psi}{k\sqrt[4]{k} + k^2 + k\sqrt{k}}.$$

Lassen wir in der letzten Gleichung m unbegrenzt wachsen, so bekommen wir links die erste der zu untersuchenden Reihen, $\sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\,\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$, bis auf ihre beiden ersten Glieder, welche auf die Konvergenz der Reihe ohne Einfluss sind. Auf der rechten Seite treten zwei unendliche Reihen auf, von denen die letzte, $\sum_k^{1,\infty} \frac{\psi}{k\sqrt[4]{k} + k^2 + k\sqrt{k}}$, im Gebiete $g_1 \leqq x,\ \xi \leqq g_2$ absolut und gleichmässig konvergiert, weil die Funktionen ψ in jedem derartigen Gebiete für alle Werte von k zwischen endlichen und festen, von k unabhängigen Grenzen liegen.

Die weitere Untersuchung hat sich mit der Reihe $\sum_{k}^{1,\infty} \frac{\sin(\xi - x)\sqrt{4k}}{k}$ zu beschäftigen.

Zur Abkürzung setzen wir

$$2(\xi - x) = z, \quad k = n.$$

Dann haben wir festzustellen, ob die Reihe $\sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n}$ überhaupt konvergiert, und wenn dies der Fall ist, ob und in welchem Intervalle sie gleichmässig konvergiert.

Wir gehen aus von dem Integrale $\int_{\alpha_0}^{\alpha_{2q}} \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha$, wo $0 < \alpha_0 < \alpha_{2q}$ ist, und nehmen zunächst an, dass $z \neq 0$ sei. Führen wir $z\alpha = u$ als neue Integrationsvariable ein, so bekommen wir:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_{2q}} \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \int_{u=z\alpha_0}^{u=z\alpha_{2q}} \frac{\sin u}{u}\, du,$$

und dieses Integral besitzt bekanntlich einen bestimmten Wert für jedes Wertepaar α_0, α_{2q}. Für $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_{2q} = \infty$ ist es gleich $\frac{\pi}{2}$.

Das Integral $\int_{\alpha_0}^{\alpha_{2q}} \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha$ stellt geometrisch die Fläche dar, welche von der Kurve $\beta = \frac{\sin z\alpha}{\alpha}$, der Achse der unabhängigen Variablen α und den Ordinaten in den Punkten $\alpha = \alpha_0$ und $\alpha = \alpha_{2q}$ eingeschlossen wird.

Es seien nun $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \ldots, \alpha_{2k}, \ldots \alpha_{2q}$, unter q eine positive ganze Zahl verstanden, die Abszissen einer Reihe von diskreten Punkten der α-Achse, und zwar sei

$$\alpha_0 < \alpha_2 < \alpha_4 < \alpha_6 < \ldots < \alpha_{2k} < \ldots < \alpha_{2q}.$$

Dann kann man das betrachtete Integral nach dem ersten Mittelwertsatze in folgender Weise als Summe darstellen:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_{2q}} \frac{sinz\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \sum_{k}^{0,q-1} (\alpha_{2k+2} - \alpha_{2k}) \frac{sinz\alpha_{2k+1}}{\alpha_{2k+1}}$$

Hierin sind die α_{2k+1} gewisse, nicht näher bekannte Werte von α, für die ganz allgemein die Umgleichung besteht

$$\alpha_{2k} < \alpha_{2k+1} < \alpha_{2k+2}.$$

Jetzt bestimmen wir die Punkte α_{2k} genauer: es sei nämlich p irgend eine positive ganze Zahl; dann setzen wir:

$$\alpha_0 = \sqrt{p}, \quad \alpha_2 = \sqrt{p+1}, \quad \alpha_4 = \sqrt{p+2}, \quad \alpha_6 = \sqrt{p+3},$$

u.s.f., allgemein $\alpha_{2k} = \sqrt{p+k}$, schliesslich $\alpha_{2q} = \sqrt{p+q}$.

In den folgenden Rechnungen wollen wir für Zahlen, welche zwischen 0 und 1 liegen, das Symbol Θ verwenden. Der Buchstabe Θ bedeutet also, ähnlich wie oben der Buchstabe ψ, irgend welche, nicht näher bestimmten Zahlen, von denen nur bekannt ist, dass für sie die Ungleichungen $0 < \Theta < 1$ bestehen.

Wir können dann schreiben:

$$\alpha_{2k+1} = \sqrt{p+k+\Theta},$$

da $\alpha_{2k} < \alpha_{2k+1} < \alpha_{2k+2}$ sein sollte, und erhalten so die Gleichung:

$$\int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+q}} \frac{sin\, z\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \sum_{k}^{0,q-1} \left(\sqrt{p+k+1} - \sqrt{p+k}\right) \frac{sinz\sqrt{p+k+\Theta}}{\sqrt{p+k+\Theta}},$$

oder, wenn $p + k = n$ gesetzt wird,

$$(11) \qquad \int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+q}} \frac{sin\, z\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \sum_{k}^{p,p+q} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \frac{sinz\sqrt{n+\Theta}}{\sqrt{n+\Theta}}.$$

Den Summanden der auf der rechten Seite stehenden Summe können wir durch die Grösse $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin z\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sin z\sqrt{n}}{n}$ in folgender Weise annähern: wir setzen

$$(12) \qquad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \rho_n ;$$

dann wird

$$(12a) \quad 0 < \rho_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2} < \frac{1}{2n\sqrt{n}} .$$

Ferner sei

$$(13) \qquad \sin z\sqrt{n+\Theta} = \sin z\sqrt{n} + \sigma_n(z);$$

so folgt

$$\sigma_n(z) = \sin z\sqrt{n+\Theta} - \sin z\sqrt{n} = z \int_n^{n+\Theta} \frac{\cos z\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}\, d\alpha,$$

mithin

$$(13a) \quad |\sigma_n(z)| < |z|\left(\sqrt{n+\Theta} - \sqrt{n}\right) < |z|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = |z|\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} - \rho_n\right)$$
$$\leqq |z|\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \rho_n\right) < \frac{|z|}{\sqrt{n}} .$$

Schliesslich setzen wir noch

$$(14) \qquad \frac{1}{\sqrt{n+\Theta}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \tau_n ;$$

dann gilt

$$(14a) \quad 0 < \tau_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+\Theta}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} < \frac{1}{n\sqrt{n}} .$$

Die durch die Gleichungen (12), (13), (14) definierten Grössen ρ_n, $\sigma_n(z)$, τ_n führen wir in den Summanden unserer Reihe in Gleichung (11) ein und bekommen:

$$\int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+q}} \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \sum_{k}^{p,p+q} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} - \rho_n\right)\left(\sin z\sqrt{n} + \sigma_n(z)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \tau_n\right).$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Ungleichungen (12*a*), (13*a*), (14*a*) die Gleichung

$$(15) \qquad \int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+q}} \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{n}^{p,p+q} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n} + \sum_{n}^{p,p+q} \frac{\chi_n(z)}{n\sqrt{n}}$$

oder

$$(15a) \quad \frac{1}{2} \sum_{n}^{p,p+q} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n} = \int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+q}} \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha - \sum_{n}^{p,p+q} \frac{\chi_n(z)}{n\sqrt{n}}.$$

Die Funktionen $\chi_n(z)$ sind, wie oben die Funktionen ψ, nicht weiter bestimmte, stetige Funktionen von z, welche dem absoluten Betrage nach für alle Werte von n unter einer von n unabhängigen, festen endlichen Zahl liegen, solange z in einem begrenzten, im Uebrigen aber beliebig grossen Intervalle verbleibt.

Aus der Gleichung (15a) können wir die Konvergenz der zu untersuchenden Reihe

$$\sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n}$$

erschliessen.

Wir wollen annehmen, dass $0 < \delta \leqq |z| \leqq g$ sei, wo δ eine beliebig kleine, aber von Null verschiedene feste Zahl und g eine beliebig grosse, aber endliche feste Zahl bedeutet. Ferner sei z positiv. Wenn z negativ ist, so ändert sich an den folgenden Ueberlegungen nichts; man muss dann nur $z = -|z|$ einführen.

Wir setzen in dem Integral auf der rechten Seite der Gleichung (15*a*) $z\alpha = u$. Dann geht die Gleichung in die folgende über:

$$(16)\qquad \frac{1}{2}\sum_{n}^{p,p+q}\frac{\sin z\sqrt{n}}{n} = \int_{z\sqrt{p}}^{z\sqrt{p+q}}\frac{\sin u}{u}\,du - \sum_{n}^{p,p+q}\frac{\chi_n(z)}{n\sqrt{n}}.$$

Die Kurve $v = \frac{\sin u}{u}$ schneidet die u-Achse in den Punkten $u = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$; sie hat unendlich viele Bögen, welche abwechselnd über und unter der u-Achse liegen. Die Flächen, welche diese Bögen mit der u-Achse abgrenzen, sind daher abwechselnd positiv und negativ; ihr absoluter Wert wird immer kleiner, wenn wir vom Punkte $u = 0$ nach rechts gehen, um schliesslich gegen 0 zu konvergieren.

Es sei A ein beliebiger Punkt der u - Achse mit der positiven Abszisse $u = \alpha$. Dieser Punkt A liegt entweder zwischen den Endpunkten eines Kurvenbogens, oder er ist der Anfangspunkt eines solchen. Wir bezeichnen den absoluten Betrag der Fläche, die der betreffende Kurvenbogen mit der u-Achse begrenzt, mit $F_{(\alpha)}$. Dann haben wir offenbar folgende Ungleichungen:

$$F_{(\alpha)} > F_{(\alpha+\pi)} > F_{(\alpha+2\pi)} > F_{(\alpha+3\pi)} > \ldots\ldots$$

Ferner sei B ein zweiter beliebiger Punkt der u-Achse mit der Abscisse $u = \beta > \alpha$. Der dem Punkte A folgende Schnittpunkt der Kurve $v = \frac{\sin u}{u}$ mit der u-Achse habe die Abscisse $u = \alpha'$. Dann betrachten wir das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin u}{u}\,du = \int_{\alpha}^{\alpha'}\frac{\sin u}{u}\,du + \int_{\alpha'}^{\beta}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

Nach der soeben eingeführten Bezeichnungsweise ist

$$\left|\int_{\alpha}^{\alpha'}\frac{\sin u}{u}\,du\right| \leqq F_{(\alpha)}.$$

Das Integral $\int_{\alpha'}^{\beta} \frac{\sin u}{u}\, du$ stellt geometrisch, wenn wir auch den Fall $\beta = \infty$ zulassen, eine endliche oder unendliche Summe von Flächen dar, welche abwechselndes Vorzeichen besitzen und dem absoluten Betrage nach beständig abnehmen. Nach dem bekannten Satze ist der absolute Betrag einer solchen Summe kleiner als der absolute Betrag des ersten Gliedes:

$$\left| \int_{\alpha'}^{\beta} \frac{\sin u}{u}\, du \right| < \left| \int_{\alpha'}^{\alpha'+\pi} \frac{\sin u}{u}\, du \right| = F_{(\alpha+\pi)}.$$

Mithin ergibt sich die Ungleichung

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin u}{u}\, du \right| < F_{(\alpha)} + F_{(\alpha+\pi)} < 2F_{(\alpha)}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle Werte $0 \leqq \alpha < \beta$, wie gross auch immer β sein mag.

Daher ist

$$\left| \int_{z\sqrt{p}}^{z\sqrt{p+q}} \frac{\sin u}{u}\, du \right| < 2F_{\left(z\sqrt{p}\right)} \leqq 2F_{\left(\delta\sqrt{p}\right)},$$

da ja $0 < \delta \leqq z$ sein sollte, und wir erhalten aus Gleichung (16) für die zu untersuchende Grösse die Ungleichung

$$(17) \quad \left| \frac{1}{2} \sum_{n}^{p,p+q} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n} \right| < 2F_{\left(\delta\sqrt{p}\right)} + \left| \sum_{n}^{p,p+q} \frac{\chi_n(z)}{n\sqrt{n}} \right|.$$

Setzen wir im Besonderen $q = \infty$, so geht diese Ungleichung in die folgende über:

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{n}^{p,\infty} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n} \right| < 2F_{\left(\delta\sqrt{p}\right)} + \left| \sum_{n}^{p,\infty} \frac{\chi_n(z)}{n\sqrt{n}} \right|.$$

Die Reihe $\sum_{n}^{1,\infty} \frac{\chi_n(z)}{n\sqrt{n}}$ ist im Intervalle $-g \leqq z \leqq +g$ absolut und gleichmässig konvergent.

Daher lässt sich stets ein grosser, aber endlicher Wert von p finden, so dass, wenn ε eine im voraus gegebene, beliebig kleine positive Zahl bedeutet, die rechte Seite der letzten Ungleichung kleiner ist als $\frac{\varepsilon}{2}$, also

$$\left| \sum_{n}^{p,\infty} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n} \right| < \varepsilon .$$

Dies gilt für alle Werte von z, welche den bisher getroffenen Einschränkungen unterworfen sind, das heisst für $0 < \delta \leqq |z| \leqq g$.

Also konvergiert unsere Reihe $\sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n}$ gleichmässig zunächst in jedem endlichen Intervalle, welches den Punkt $z = 0$ nicht enthält.

In jedem noch so kleinen Intervalle dagegen, welches den Punkt $z = 0$ enthält, ist die Reihe $\sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n}$ sicher nicht gleichmässig konvergent.

Denn wir gewinnen aus (15a) für $p = 1$ und $q = \infty$ die Gleichung:

$$\frac{1}{2} \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n} = \int_{1}^{\infty} \frac{\sin z\alpha}{\alpha} d\alpha - \sum_{n}^{1,\infty} \frac{\chi_n(z)}{n\sqrt{n}} .$$

Die letzte Reihe ist eine gleichmässig konvergente Reihe von stetigen Funktionen, also selbst eine stetige Funktion.

Das Integral $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin z\alpha}{\alpha} d\alpha$ dagegen ist eine bei $z = 0$ unstetige Funktion von z.

Wenn nämlich z zunächst einen von Null verschiedenen, positiven Wert hat, so erhalten wir durch Einführung der Variablen $z\,\alpha = u$ die Gleichung

$$\int_1^\infty \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \int_z^\infty \frac{\sin u}{u}\, du,$$

folglich

$$\lim_{z=+0} \int_1^\infty \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \lim_{z=0} \int_z^\infty \frac{\sin u}{u}\, du$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}\,.$$

Wenn dagegen z zunächst einen von Null verschiedenen, negativen Wert hat, so wird bei Einführung der Variablen $|z|\,\alpha = u$

$$\int_1^\infty \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha = -\int_1^\infty \frac{\sin |z|\alpha}{\alpha}\, d\alpha = -\int_{|z|}^\infty \frac{\sin u}{u}\, du\,,$$

folglich

$$\lim_{z=-0} \int_1^\infty \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha = -\lim_{|z|=0} \int_{|z|}^\infty \frac{\sin u}{u}\, du = -\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du = -\frac{\pi}{2}.$$

Das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin z\alpha}{\alpha}\, d\alpha$ macht also bei $z = 0$ einen Sprung von der Grösse π.

Daher muss auch die durch die Reihe $\frac{1}{2}\sum_n^{1,\infty} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n}$ dargestellte Funktion bei $z = 0$ einen Sprung von der Grösse π machen, und infolgedessen kann die Reihe selbst in keinem Intervalle, dem der Punkt $z = 0$ angehört, gleichmässig konvergieren.

Wir haben damit nachgewiesen, dass die Reihe

$$\sum_{n}^{1,\infty} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n}$$

in jedem endlichen Intervalle, welches den Punkt $z = 0$ nicht enthält, und nur in einem solchen, gleichmässig konvergiert.

Gehen wir jetzt zu der aus (10) folgenden Gleichung zurück:

$$\sum_{n}^{2,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k}^{1,\infty} \frac{\sin(\xi - x)\sqrt{4k}}{k} + \sum_{k}^{1,\infty} \frac{\psi}{k\sqrt[4]{k} + k^2 + k\sqrt[4]{k}}$$

zurück, so bekommen wir wegen der gleichmässigen Konvergenz der letzten Reihe der rechten Seite in jedem Gebiete $g_1 \leqq x, \xi \leqq g_2$ das Resultat:

Die Reihe

$$\sum_{n}^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$$

konvergiert gleichmässig, wenn x und ξ ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchlaufen und dabei $|x - \xi|$ über einer festen Grenze bleibt.

Die gleichmässige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n}^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$$

lässt sich ohne Schwierigkeit aus den vorangehenden Untersuchungen ablesen:

Setzen wir in (10) $\xi = x$, so erhalten wir die Gleichung:

$$\sum_{n}^{2,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n} = \sum_{k}^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{\psi}{k\sqrt[4]{k} + k^2 + k\sqrt[4]{k}}.$$

In dieser gehen wir zur Grenze $m = \infty$ über:

$$\sum_{n}^{2,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n} = \sum_{k}^{1,\infty} \frac{\psi}{k\sqrt[4]{k+k^2+k\sqrt{k}}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Reihe

$$\sum_{n}^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$$

innerhalb jedes Intervalles g_1, g_2 gleichmässig konvergiert.

Damit ist die Voraussetzung (E) als erfüllt nachgewiesen.

Schliesslich ist noch zu zeigen, dass auch die Voraussetzung (F) gilt, dass nämlich die Grössen

$$\sum_{n}^{0,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} \quad \text{und} \quad \sum_{n}^{0,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$$

für alle Werte von m zwischen festen, von m, x und ξ unabhängigen Grenzen bleiben, wenn x und ξ ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchlaufen und in der ersten dieser beiden Grössen $x - \xi|$ über einer festen Grenze bleibt.

Wir können uns darauf beschränken, diese Eigenschaft für ungrade Werte von m von den Summen

$$\sum_{n}^{2,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} \quad \text{und} \quad \sum_{n}^{2,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$$

zu beweisen. Denn wir vernachlässigen dabei höchstens drei Summanden, und jeder derselben besitzt nach den Gleichungen (2) und (8) und den Ungleichungen (5), (6), (7), (9) die von den obigen Summen behauptete Eigenschaft.

Wir gehen wiederum von der Gleichung (10) aus:

(10)
$$\sum_{n}^{2,m} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k}^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{sin(\xi-x)\sqrt{4k}}{k} + \sum_{k}^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{\psi}{k\sqrt[4]{k+k^2+k\sqrt{k}}}.$$

In der letzten dieser Summen bleibt der absolute Betrag der Grössen ψ unter einer von k unabhängigen, festen posi-

tiven Zahl C, wenn x und ξ ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchlaufen. Daher ist für solche Werte von x und ξ

$$\left|\sum_{k}^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{\psi}{k\sqrt[4]{k+k^2+k\sqrt{k}}}\right| < C \sum_{k}^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{1}{k\sqrt[4]{k+k^2+k\sqrt{k}}}$$

$$< C\sum_{k}^{1,\infty} \frac{1}{k\sqrt[4]{k+k^2+k\sqrt{k}}} = c.$$

Für $x = \xi$, d. h. für die Summe $\sum_{n}^{0,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$, ist also unsere Behauptung bewiesen.

Wenn aber $|x = \xi|$ über einer festen Grenze liegt, so schätzen wir den ersten Summanden auf der rechten Seite von (10) mit Hilfe der Ungleichung (17) ab:

$$(17) \qquad \left|\frac{1}{2}\sum_{n}^{p,p+q} \frac{\sin z\sqrt{n}}{n}\right| < 2F_{(\delta\sqrt{p})} + \left|\sum_{n}^{p,p+q} \frac{\chi_n(z)}{n\sqrt{n}}\right|.$$

Aus dieser folgt:

$$\left|\sum_{k}^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{\sin z\sqrt{k}}{k}\right| < 4F_{(\delta)} + 2\sum_{k}^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{|\chi_k(z)|}{k\sqrt{k}},$$

$$\left|\sum_{k}^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{\sin(\xi-x)\sqrt{4k}}{k}\right| < 4\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin u}{u}\,du + 2\sum_{k}^{1,\infty} \frac{|\chi_k(2\xi-2x)|}{k\sqrt{k}}.$$

Der erste Summand der rechten Seite ist eine von m, x und ξ unabhängige Konstante c_1; der zweite Summand ist, wenn x und ξ irgend ein Intervall g_1, g_2 durchlaufen, kleiner als eine ebensolche Konstante c_2, weil die Grössen $|\chi_k(2\xi - 2x)|$ in jedem derartigen Intervalle für alle Werte von k unter einer von k unabhängigen Grenze bleiben.

Wir gelangen so zu den Ungleichungen:

$$\left| \sum_{k}^{1,\frac{m-1}{2}} \frac{\sin(\xi - x)\sqrt{4k}}{k} \right| < c_1 + c_2,$$

$$\left| \sum_{n}^{2,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} \right| < c + \frac{c_1 + c_2}{2\pi}.$$

Da die Konstanten c, c_1, c_2 von m unabhängig sind, so ist damit unsere Behauptung bezüglich der Summen $\sum_{n}^{0,m} \frac{\varphi_n''(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$ vollständig bewiesen.

Die Voraussetzung (F) ist erfüllt.

Wir haben gezeigt, dass alle Voraussetzungen (A) bis (F) befriedigt sind, die wir im I. und II. Kapitel eingeführt hatten. Daher sind die Untersuchungen und Sätze dieser beiden Kapitel auf den vorliegenden Fall anwendbar, und wir gewinnen aus dem Resultat des II. Kapitels folgenden Satz für die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen Orthogonalfunktionen:

Es sei $f(x)$ eine willkürliche, im Grundgebiete $-\infty$, $+\infty$ definierte Funktion von x. Sie sei im ganzen Grundgebiete eine Funktion von beschränkter Schwankung; ausserdem aber mögen sich zwei Grenzen für x angeben lassen, von der Art, dass die Funktion oberhalb der einen und unterhalb der andern mit ihren beiden ersten Abteilungen stetig ist; ferner verschwinde sie im Unendlichen, und das Quadrat der Funktion $p(x) = -f''(x) + (1 + x^2) f(x)$ sei über das Grundgebiet integrabel. Dann gilt im ganzen Grundgebiete die Entwicklung;

$$\sum_{n}^{0,\infty} \varphi_n(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\varphi_n(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

wo die $\varphi_n(x)$ die normierten Hermiteschen Orthogonalfunktionen bedeuten.

§ 17. Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen.

Eine notwendige Bedingung dafür, dass die Resultate des I. Kapitels Giltigkeit haben, ist die, dass die Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(s,t)$ bilden.

Wir wollen in diesem Paragraphen nachweisen, dass das System der Hermiteschen Orthogonalfunktionen in der Tat ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des in § 15 definierten Kernes $K(x,\xi)$ ist. Dabei wird sich zugleich herausstellen, dass, wie wir schon in § 15 behauptet hatten, der Parameterwert $\lambda_n = 0$ eine Lösung des Randwertproblems dieses Paragraphen nicht liefert.

Dem vollständigen normierten Orthogonalsystem des Kernes $K(x,\xi)$ gehören alle stetigen Lösungen $\psi(x)$ der Integralgleichung

$$\psi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,\xi)\psi(\xi)d\xi$$

an, deren Quadrat über das Grundgebiet $-\infty$, $+\infty$ integrabel ist.

Nun hatten wir in § 12 des II. Kapitels gezeigt, dass aus der Gleichung

$$F(x) = \int_a^\infty K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

die andere folgt:

$$\frac{d(kF'(x))}{dx} - lF(x) = -f(x),$$

wenn $K(x,\xi)$ die Voraussetzung (B) erfüllt, und wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, deren Quadrat, von a bis ∞ integriert, einen bestimmten, endlichen Wert ergibt.

In unserem Falle ist (s. § 15)

$$a = -\infty,\ k = 1,\ l = 1 + x^2,\ F(x) = \psi(x),$$
$$f(x) = \lambda\psi(x)$$

zu setzen.

Wir erhalten so für alle Funktionen $\psi(x)$ des normierten Orthogonalsystems des Kernes $K(x,\xi)$ die Gleichung

$$\psi''(x) + (\lambda - 1 - x^2)\psi(x) = 0.$$

Setzen wir $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot y$, $\lambda - 2 = 2\nu$, so folgt für y die Differentialgleichung:

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0.$$

Wir können also sagen: die Funktionen $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} y$ des vollständigen normierten Orthogonalsystems sind alle diejenigen stetigen Funktionen, deren Faktor y die Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0$$

befriedigt und deren Quadrat von $-\infty$ bis $+\infty$ integrabel ist.

Es wird sich nun zeigen, dass diese letzte Bedingung nur dann erfüllt ist, wenn ν gleich einer der ganzen Zahlen $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und y ein Polynom in x ist; dieses Polynom ist mit dem Hermiteschen Polynom $P_n(x)$ bis auf einen konstanten Faktor identisch.

Damit wird dann bewiesen sein, dass die Hermiteschen Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$ für $n = 0,1,2,\ldots$ tatsächlich ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(x,\xi)$ bilden.

Wir suchen das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0$$

auf; dieses lautet:

$$y = a_0 y_0 + a_1 y_1,$$

wobei

$$y_0 = \sum_k^{0,\infty} a_{2k} x^{2k}, \qquad y_1 = \sum_k^{0,\infty} a_{2k+1} x^{2k+1},$$

$$a_{2k} = (-1)^k \cdot 2^k \cdot \frac{\nu(\nu-2)(\nu-4)\ldots(\nu-2k+2)}{(2k)!},$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \cdot 2^k \cdot \frac{(\nu - 1)(\nu-3)(\nu-5)\ldots(\nu-2k+1)}{(2k+1)!}$$

ist. Die Ausdrücke für a_{2k} und a_{2k+1} mögen für $k = 0$ in 1 übergehen.

Wir haben inbezug auf ν folgende Fälle zu unterscheiden:

1) ν eine positive Zahl.
   a) ν ein positiver Bruch.
   b) ν eine positive ganze Zahl.
2) ν eine negative Zahl.

Wir betrachten zunächst den Fall

1a) ν ein positiver Bruch.

ν sei zwischen zwei Zahlen $2K$ und $2K+1$ gelegen wo K eine positive ganze Zahl bedeutet. Dann können wir schreiben:

$$\nu = 2K + \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

Der Koeffizient a_{2k} von y_0 enthält das Produkt:

$$\nu(\nu-2)(\nu-4)\ldots(\nu-2k+2) = \nu(\nu-2)(\nu-4)\ldots(2K-2k+2+\varepsilon).$$

In diesem Produkte werden die ersten Faktoren im allgemeinen positiv sein, später aber werden, wenn k genügend gross ist, die Faktoren negativ werden. Wann tritt dies ein und welches Vorzeichen besitzt das ganze Produkt?

Es sei $k = K + 1$. Dann ist der letzte Faktor des Produktes gleich ε, die vorangehenden sind $\varepsilon + 2$, $\varepsilon + 4, \ldots$, also tritt in dem ganzen Produkte überhaupt kein negativer Faktor auf. Das Vorzeichen des Produktes ist $(-1)^0 = (-1)^{K+1-(K+1)}$.

Ist $k = K + 2$, so lautet das Produkt folgendermassen:

$$\nu(\nu-2)(\nu-4)\ldots(\varepsilon+2)\,\varepsilon\,(\varepsilon-2).$$

Sein Vorzeichen ist $(-1)^1 = (-1)^{K+2-(K+1)}$.

Für $k = K + 3$ ergibt sich ebenso für das Vorzeichen des Produktes $(-1)^2 = (-1)^{K+3-(K+1)}$.

Allgemein ist das Vorzeichen des Produktes für beliebiges $k \geqq K + 1$ gleich $(-1)^{k-(K+1)} = (-1)^{K+1+k}$.

Folglich ist für $k \geqq K + 1$:

$$\nu(\nu-2)(\nu-4)\ldots(\nu-2k+2)=(-1)^{K+1+k}\cdot|\nu(\nu-2)\ldots(\nu-2k+2)|$$

$$a_{2k}=(-1)^{K+1}\cdot 2^k\cdot\frac{|\nu(\nu-2)\ldots(\nu-2k+2)|}{(2k)!},$$

und wir erhalten für y_0 die Gleichungen:

$$y_0=\sum_k^{0,K} a_{2k}x^{2k}+(-1)^{K+1}\cdot\sum_k^{K+1,\infty}2^k\cdot\frac{|\nu(\nu-2)\ldots(\nu-2k+2)|}{(2k)!}x^{2k}$$

$$=\sum_k^{0,K}\left[a_{2k}+(-1)^K\cdot 2^k\cdot\frac{|\nu(\nu-2)\ldots(\nu-2k+2)|}{(2k)!}\right]x^{2k}$$

$$+(-1)^{K+1}\cdot\sum_k^{0,\infty}2^k\frac{|\nu(\nu-2)\ldots(\nu-2k+2)|}{(2k)!}x^{2k},$$

oder, wenn die erste Summe, welche ein Polynom in x vom Grade K ist, mit $P_0{}^K(x)$ bezeichnet wird,

$$y_0=P_0{}^K(x)+(-1)^{K+1}\cdot\sum_k^{0,\infty}2^k\frac{|\nu(\nu-2)\ldots(\nu-2k+2)|}{2k)!}x^{2k}.$$

Wir nehmen die Zerlegung vor:

$$(2k)!=2^k\cdot k!.1.3.5.7\ldots.(2k-1):$$

$$y_0=P_0{}^K(x)+(-1)^{K+1}\cdot\sum_k^{0,\infty}\left|\frac{\nu}{1}\frac{\nu-2}{3}\frac{\nu-4}{5}\ldots\frac{\nu-2k+2}{2k-1}\right|\frac{x^{2k}}{k!}.$$

Wir setzen:

$$\Pi^k=\left|\delta\frac{\nu}{1}\right|\cdot\left|\delta\frac{\nu-2}{3}\right|\cdot\left|\delta\frac{\nu-4}{5}\right|\ldots\left|\delta\frac{\nu-2k+2}{2k-1}\right|,$$

wo δ irgend eine Zahl >1 sein soll. Dann wird:

$$y_0=P_0{}^K(x)+(-1)^{K+1}\cdot\sum_k^{0,\infty}\Pi^k\frac{x^{2k}}{\delta^k\cdot k!}.$$

Jetzt soll gezeigt werden, dass Π_k grösser als eine von 0 verschiedene Konstante c ist, welchen Wert auch immer k haben möge.

Π_k ist für $k = \infty$ ein Produkt mit unendlich vielen Faktoren. Wir benutzen nun folgenden Satz: Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n positive Zahlen sind, von denen jede < 1 ist, und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ beliebig viele positive Zahlen, von denen jede > 1 ist, so ist jedes aus beliebigen Faktoren α und β gebildete Produkt grösser als das Produkt $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_n$. Diesen Satz wenden wir auf Π_k an: wir denken uns $\lim_{k=\infty} \Pi_k$ gebildet und suchen in diesem unendlichen Produkte alle Faktoren (α) auf, die < 1 sind. Die Faktoren von Π_k haben allgemein die Form

$$F = \delta \left| \frac{\nu - 2\mu}{2\mu + 1} \right| \text{ für } \mu = 0,1,2,\ldots$$

Es handelt sich darum festzustellen, welches der letzte Faktor F ist, der < 1 ist. Die F werden mit wachsendem μ im allgemeinen zunächst kleiner werden, sobald aber $2\mu > \nu$ wird, wieder wachsen. Der letzte der F, der noch < 1 ist, ist durch das grösste μ bestimmt, welches die Ungleichung

$$\delta(2\mu - \nu) < 2\mu + 1 \quad \text{oder} \quad \mu < \frac{1 + \delta\nu}{2(\delta - 1)}$$

befriedigt. Dieser Wert von μ ist endlich, da $\delta < 1$ sein sollte und als endlich angenommen wurde. Folglich ist auch die Anzahl der in dem unendlichen Produkte $\lim_{k=\infty} \Pi_k$ vorkommenden Faktoren F, welche < 1 sind, endlich; das heisst nach der Bezeichnung des obigen Satzes: die Anzahl der α, n, ist endlich. Da ferner ν eine gebrochene Zahl sein sollte, also alle F von Null verschieden sind, so ist das Produkt der α, nämlich die Grösse $\alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_n$, gleich einer endlichen Konstanten c, welche zwar < 1, aber > 0 ist. Nach dem angeführten Satze ist also für jedes k

$$\Pi_k > c.$$

Mithin erhalten wir für hinreichend grosse Werte von x die Ungleichungen:

$$|y_0| \geqq \sum_{k}^{0,\infty} \Pi_k \frac{x^{2k}}{\delta^k \cdot k!} - |F_0^{\kappa}(x)|$$

$$> c \sum_{k}^{0,\infty} \frac{x^{2k}}{\delta^k \cdot k!} - |P_0^K(x)|,$$

$$|y_0| > c e^{\frac{1}{\delta}x^2} - |P_0^K(x)|,$$

$$|e^{-\frac{x^2}{2}} y_0| > c e^{x^2\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{2}\right)} - |e^{-\frac{x^2}{2}} P_0^K(x)|.$$

Setzen wir jetzt fest, dass $\delta < 2$ sein soll, so folgt aus $1 < \delta < 2$ für $\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} = \eta$ die Ungleichung $0 < \eta < \frac{1}{2}$, und es ist:

$$|e^{-\frac{x^2}{2}} y_0| > c e^{\eta x^2} - |e^{-\frac{x^2}{2}} P_0^K(x)|. \tag{I}$$

Auf genau dieselbe Weise behandeln wir die Reihe y_1. Es ist

$$a_{2k+1} = (-1)^k \cdot 2^k \cdot \frac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu-5)\ldots(\nu-2k+1)}{(2k+1)!}$$

$$(\nu-1)(\nu-3)\ldots(\nu-2k+1) = (\nu-1)(\nu-3)\ldots(2K-2k+1+\varepsilon)$$
$$= (-1)^{k-K} \cdot |(\nu-1)(\nu-3)\ldots(\nu-2k+1)|$$

für $k \geqq K+1$. Folglich:

$$a_{2k+1} = (-1)^K \cdot 2^k \cdot \frac{|(\nu-1)(\nu-3)\ldots(\nu-2k+1)|}{(2k+1)!},$$

$$y_1 = \sum_{k}^{0,K} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

$$+ (-1)^K \cdot \sum_{k}^{K+1,\infty} 2^k \frac{|(\nu-1)(\nu-3)\ldots(\nu-2k+1)|}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \sum_{k}^{0,K} \left[a_{2k+1} + (-1)^{K-1} \cdot 2^k \cdot \frac{|(\nu-1)(\nu-3)\ldots(\nu-2k+1)|}{(2k+1)!} \right] x^{2k+1}$$

$$+ (-1)^K \cdot \sum_{k}^{0,\infty} 2 \frac{|(\nu-1)(\nu-3)\ldots(\nu-2k+1)|}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

$$y_1 = P_1^K(x) + (-1)^K \cdot \sum_k^{0,\infty} 2^k \frac{|(\nu-1)(\nu-3)\ldots(\nu-2k+1)|}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

wo $P_1^K(x)$ ein Polynom in x vom Grade K ist. Wir zerlegen $(2k+1)!$:

$$(2k+1)! = 2^k . k! . 1 . 3 . 5 . 7 \ldots . (2k+1),$$

und erhalten für y_1 die Gleichung:

$$y_1 = P_1^K(x)$$

$$+(-1)^K \cdot \sum_k^{0,\infty} \left| \frac{\nu-1}{3} \frac{\nu-3}{5} \frac{\nu-5}{7} \cdots \frac{\nu-2k+1}{2k+1} \right| \frac{x^{2k+1}}{k!}$$

$$= P_1^K(x)$$

$$+(-1)^K \cdot \sum_k^{0,\infty} \left| \delta \frac{\nu-1}{3} \right| \cdot \left| \delta \frac{\nu-3}{5} \right| \cdot \ldots \cdot \left| \delta \frac{\nu-2k+1}{2k+1} \right| \frac{x^{2k+1}}{\delta^k \cdot k!}.$$

Wie oben zeigt man, dass

$$\left| \delta \frac{\nu-1}{3} \right| \cdot \left| \delta \frac{\nu-3}{5} \right| \cdot \left| \delta \frac{\nu-5}{7} \right| \cdot \ldots \cdot \left| \delta \frac{\nu-2k+1}{2k+1} \right| > c_1$$

ist, wobei $0 < c_1 < 1$.

Es folgt für hinreichend grosses x:

$$|y_1| \geqq c_1 |x| \sum_k^{0,\infty} \frac{x^{2k}}{\delta^k \cdot k!} - |P_1^K(x)|,$$

$$|y_1| > c_1 |x| e^{\frac{1}{\delta} x^2} - |P_1^K(x)|,$$

$$|e^{-\frac{x^2}{2}} y_1| > c_1 |x| e^{x^2\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2}\right)} - |e^{-\frac{x^2}{2}} P_1^K(x)|,$$

$$\text{(II)} \quad |e^{-\frac{x^2}{2}} y_1| > c_1 |x| e^{\eta x^2} - |e^{-\frac{x^2}{2}} P_1^K(x)|.$$

Wir hatten bisher angenommen, dass ν zwischen zwei Zahlen $2K$ und $2K+1$ liegt. Wir gelangen zu denselben Ungleichungen (I) und (II), wenn ν zwischen zwei Zahlen $2K-1$ und $2K$ liegt.

Wir betrachten jetzt den Fall

1b) ν eine positive ganze Zahl.

ν sei zunächst grade. Dann wird die Reihe y_0 nach einer gewissen Anzahl von Gliedern abbrechen, also sich auf ein Polynom reduzieren, welches vom Grade ν ist, weil die Koeffizienten a_{2k} für $k \geqq \frac{\nu}{2} + 1$ verschwinden. Die Untersuchung von y_1 ist dieselbe wie unter 1a), wenn wir dort $\varepsilon = 0$ setzen. Wir erhalten für y_1 die Ungleichung (II).

Wenn ν eine ungrade positive Zahl ist, so wird die Reihe y_1 nach einer gewissen Anzahl von Gliedern abbrechen und sich auf ein Polynom vom Grade ν reduzieren, weil die Koeffizienten a_{2k+1} für $k \geqq \frac{\nu+1}{2}$ verschwinden. Für y_0 ist die Untersuchung dieselbe wie unter 1a), wenn dort $\varepsilon = 1$ gesetzt wird. Es ergibt sich für y_0 die Ungleichung (I).

Schliesslich haben wir noch den Fall

2) ν eine negative Zahl

zu untersuchen.

Wenn ν negativ ist, so sind alle Faktoren der in den Koeffizienten vorkommenden Produkte negativ. Also können wir schreiben:

$$a_{2k} = (-1)^k \cdot 2^k \cdot (-1)^k \frac{(-\nu)(2-\nu)(4-\nu)\ldots(2k-2-\nu)}{(2k)!},$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \cdot 2^k \cdot (-1)^k \frac{(1-\nu)(3-\nu)(5-\nu)\ldots(2k-1-\nu)}{(2k+1)!}$$

oder:

$$a_{2k} = \frac{-\nu}{1}\,\frac{2-\nu}{3}\,\frac{4-\nu}{5} \cdots \frac{2k-2-\nu}{2k-1}\,\frac{1}{k!},$$

$$a_{2k+1} = \frac{1-\nu}{3}\,\frac{3-\nu}{5}\,\frac{5-\nu}{7} \cdots \frac{2k-1-\nu}{2k+1}\,\frac{1}{k!}.$$

Da $-\nu > 0$ ist, so folgt für $k \geqq 1$:

$$a_{2k} > (-\nu)\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{7} \cdots \frac{2k-2}{2k-1}\,\frac{1}{k!}$$

$$> (-2\nu)\,\frac{1}{3}\,\frac{3}{5}\,\frac{5}{7}\cdots\frac{2k-3}{2k-1}\,\frac{1}{k!},$$

$$a_{2k} > \frac{-2\nu}{2k-1}\,\frac{1}{k!} > \frac{-2\nu}{2k+2}\,\frac{1}{k!},$$

$$a_{2k} > (-\nu)\,\frac{1}{(k+1)!}.$$

Ebenso erhalten wir die Ungleichungen:

$$a_{2k+1} > \frac{1}{3}\,\frac{3}{5}\,\frac{5}{7}\cdots\frac{2k-1}{2k+1}\,\frac{1}{k!},$$

$$a_{2k+1} > \frac{1}{2k+1}\,\frac{1}{k!} > \frac{1}{2k+2}\,\frac{1}{k!},$$

$$a_{2k+1} > \frac{1}{2}\,\frac{1}{(k+1)!}.$$

Unter Benutzung der Ungleichungen für a_{2k} und a_{2k+1} bekommen wir für y_0 und y_1 die folgenden:

$$y_0 > 1 + (-\nu)\sum_{k}^{1,\infty}\frac{x^{2k}}{(k+1)!},$$

$$y_0 > (-\nu)\sum_{k}^{-1,\infty}\frac{x^{2k}}{(k+1)!} + 1 + \nu\left(\frac{1}{x^2}+1\right),$$

$$y_0 > (-\nu)\,\frac{1}{x^2}\,e^{x^2} + \frac{x^2(1+\nu)+\nu}{x^2},$$

$$\text{(III)}\quad \left|e^{-\frac{x^2}{2}}\,y_0\right| > (-\nu)\,\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{x^2}{2}} - \left|e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{x^2(1+\nu)+\nu}{x^2}\right|;$$

ferner:

$$y_1 > x + \frac{1}{2}\sum_{k}^{1,\infty}\frac{x^{2k+1}}{(k+1)!},$$

$$y_1 > \frac{1}{2}\sum_{k}^{-1,\infty}\frac{x^{2k+1}}{(k+1)!} - \frac{1}{2x} + \frac{x}{2},$$

$$y_1 > \frac{1}{2x} \sum_{k}^{-1,\infty} \frac{x^{2(k+1)}}{(k+1)!} - \left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right),$$

$$y_1 > \frac{1}{2x} e^{x^2} - \left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right),$$

$$\text{(IV)} \quad \left| e^{-\frac{x^2}{2}} y_1 \right| > \frac{1}{2|x|} e^{-\frac{x^2}{2}} - \left| e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right) \right|.$$

Wir haben alle bezüglich ν denkbaren Fälle untersucht. Wenn nun das Integral über dem Quadrate der Funktion $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} y = e^{-\frac{x^2}{2}} (a_0 y_0 + a_1 y_1)$, genommen von $-\infty$ bis $+\infty$, einen bestimmten, endlichen Wert besitzen soll, so muss $\psi(x)$ im Unendlichen verschwinden. Aus den erhaltenen Resultaten folgt aber: die Funktion $e^{-\frac{x^2}{2}} y_0$ verschwindet im Unendlichen nur dann, wenn ν eine positive, ganze, grade Zahl ist; ebenso verschwindet die Funktion $e^{-\frac{x^2}{2}} y_1$ im Unendlichen nur dann, wenn ν eine positive, ganze, ungrade Zahl ist. In allen übrigen Fällen wachsen beide Funktionen im Unendlichen über alle Grenzen.

Daraus folgt weiter: von allen Funktionen $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} y$ sind die einzigen, welche im Unendlichen verschwinden, durch folgende Bedingungen bestimmt:

1) ν eine positive grade Zahl, $a_1 = 0$;

2) ν eine positive ungrade Zahl, $a_0 = 0$;

und das Quadrat dieser Funktionen ist wirklich von $-\infty$ bis $+\infty$ integrabel, weil dann y ein Polynom ist.

Diese Polynome sind bis auf einen konstanten, von ν abhängigen Faktor die Hermiteschen Polynome $P_\nu(x)$ für $\nu = 0,1,2\ldots$

Damit ist nachgewiesen, dass die Hermiteschen Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ die

einzigen stetigen Funktionen $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} y$ sind, deren Faktor y die Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0$$

befriedigt und deren Quadrat von $-\infty$ bis $+\infty$ integrabel ist. Nach der Bemerkung am Anfange dieses Paragraphen bilden dieselben also ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(x,\xi)$, wie behauptet worden war.

Teil 2. Die Laguerreschen Orthogonalfunktionen.

Wir gehen jetzt zur Behandlung des Problems über, willkürliche Funktionen im Intervalle $-\infty,0$ nach den Laguerreschen Orthogonalfunktionen zu entwickeln.

Wir wollen der Kürze halber nur die wichtigsten Resultate angeben, ohne die Rechnungen im einzelnen durchzuführen, weil dieselben denen des 1. Teils dieses Kapitels durchaus analog sind und sich wie diese vollkommen an die allgemeinen Untersuchungen des II. Kapitels anschliessen.

§ 18. Die Integralgleichung.

Die Laguerreschen Polynome $Q_n(x)$ sind im Intervalle $-\infty,0$ definiert als die Polynome, welche die Differentialgleichung

$$zQ_n''(z)+(1+z)Q_n'(z)-nQ_n(z)=0$$

befriedigen, wobei $n = 0,1,2,\ldots$ zu nehmen ist.

Wir wollen setzen:

$$z=-x,\quad Q_n(z) = Q_n(-x) = R_n(x).$$

Dann sind die Polynome $R_n(x)$ im Intervalle $0,+\infty$ definiert als die Polynome, welche die Differentialgleichung

$$xR_n''(x) + (1-x)\,R_n'(x) + nR_n(x) = 0$$

befriedigen.

Die Laguerreschen Orthogonalfunktionen $e^{\frac{z}{2}}\,Q_n(z)$ gehen über in die Funktionen $\varphi_n(x) = e^{-\frac{x}{2}}\,R_n(x)$. Die Differentialgleichung derselben lautet:

$$x\varphi_n''(x) + \varphi_n'(x) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)\varphi_n(x) = 0$$

oder, wenn $\lambda_n = n + 1$ gesetzt wird,

$$x\varphi_n''(x) + \varphi_n'(x) + \left(\lambda_n - \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)\varphi_n(x) = 0$$

oder schliesslich:

$$\frac{d}{dx}[x\varphi_n'(x)] + \left[\lambda_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right)\right]\varphi_n(x) = 0.$$

Die Randbedingungen sind folgende:

$$\varphi_n(x)\,\big|^{x=0} = fin., \qquad \varphi_n(x)\,\big|^{x=+\infty} = 0.$$

Wir haben also auch hier ein Randwertproblem vom Typus (*C*). Es ist nämlich zu setzen:

$$V(x) = \varphi_\nu(x) = \varphi_n(x), \quad k = x, \quad \lambda = \lambda_\nu = \lambda_n,$$

$$l = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}, \quad h = 0, \quad a = 0.$$

Wie bei den Hermiteschen Polynomen liefern die Werte $\lambda_n = n + 1$ für $n = 0,1,2, \ldots$ sämtliche Lösungen des Randwertproblems, welche mit ihrer ersten Ableitung stetig sind, so dass der Wert $\lambda_n = 0$ nicht vorkommt (vgl. § 20).

Wir können nun nach der allgemeinen Methode des II. Kapitels (§ 12) wie im 1. Teile einen Kern $K(x,\xi)$ im Intervalle $0, +\infty$ definieren.

Dieser Kern hat folgende Gestalt:

$$K(x,\xi) = \begin{cases} -e^{\frac{x+\xi}{2}} \int_{+\infty}^{\xi} \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha & x \leqq \xi \\ -e^{\frac{\xi+x}{2}} \int_{+\infty}^{x} \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha & \xi \leqq x. \end{cases}$$

Für ihn bestehen die Gleichungen:

$$x\frac{\partial^2 K(x,\xi)}{\partial x^2} + \frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x} - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right)K(x,\xi) = 0,$$

$$K(x,\xi)\,\big|^{x=\xi-0} = K(x,\xi)\,\big|^{x=\xi+0},$$

$$\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x}\Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = \frac{1}{k(\xi)} = \frac{1}{\xi},$$

$$K(x,\xi)\,\big|^{x=0} = finit. \quad (\text{für } \xi > 0), \quad K(x,\xi)\,\big|^{x=\infty} = 0.$$

Ferner gilt für $K(x,\xi)$ die Voraussetzung (B): das Integral $\int_0^\infty [K(x,\xi)]^2 d\xi$ besitzt für alle Werte von x im Grundgebiete $0, \infty$ selbst bestimmte Werte, die alle unter einer endlichen Konstanten A liegen, und das Doppelintegral $\int_0^\infty\int_0^\infty [K(x,\xi)]^2 dx d\xi$ ist gleich einer endlichen Konstanten C.

Die beiden Randbedingungen und diese Voraussetzung (B) beweist man mit Hilfe des im 1. Teile, § 15, angeführten Lemmas genau so, wie wir die entsprechenden Beziehungen für den Kern der Hermiteschen Orthogonalfunktionen bewiesen haben.

Für die Lösungen $\varphi_n(x)$ des Randwertproblems besteht folgende Beziehung[1]):

$$I_n = \int_0^\infty \varphi_n^2(x)dx = \int_0^\infty e^{-x} R_n^2(x)dx = \int_{-\infty}^0 e^z Q_n^2(z)dz = (n!)^2,$$

d. h. es ist die Voraussetzung (A') erfüllt, und wir gelangen daher sofort zu der Integralgleichung

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_0^\infty K(x,\xi)\varphi_n(\xi)d\xi.$$

Es gilt also auch die Voraussetzung (A); wir wollen fortan unter den $\varphi_n(x)$ wieder die normierten Eigenfunktionen verstehen.

---

[1]) Laguerre, Oeuvres, T. I, p. 435.

§ 19. Die Reihen

$$\sum \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2}, \quad \sum \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}, \quad \sum \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n},$$

$$\sum \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}.$$

Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Laguerreschen Orthogonalfunktionen.

Es bleibt uns jetzt noch übrig zu zeigen, dass die Voraussetzungen (D), (E) und (F) erfüllt sind.

Dazu brauchen wir auch hier asymptotische Ausdrücke für die Eigenfunktionen $\varphi_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} R_n(x)$. Man kann diese nach derselben Methode herleiten, welche Stekloff in der in der Einleitung zitierten Abhandlung auf die Hermiteschen Orthogonalfunktionen angewandt hat, und deren Resultate wir im 1. Teile dieses Kapitels benutzt haben.

Wir schreiben die Differentialgleichung der Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ in folgender Gestalt:

$$x\varphi_n''(x) + \varphi_n'(x) + n\varphi_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right)\varphi_n(x),$$

und fassen die rechte Seite nicht als eine Funktion von φ_n, sondern als eine bekannte Funktion von x auf, betrachten also die Gleichung als eine inhomogene Differentialgleichung von der Form

$$xy'' + y' + ny = f(x)$$

und lösen sie nach der Methode der Variation der Konstanten.

Man erhält dann, wenn man noch beachtet, dass

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} R_n(x)}{\sqrt{I_n}} \text{ und } [1])\ \varphi_n(0) = \frac{R_n(0)}{\sqrt{I_n}} = \frac{Q_n(0)}{\sqrt{I_n}} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ist, folgende Gleichung:

---

[1]) Laguerre, l. c., p. 430.

$$\varphi_n(x)=J_0(2\sqrt{nx})-\frac{\pi}{2}\left\{J_0(2\sqrt{nx})\cdot\int_0^x Y_0(2\sqrt{n\alpha})\cdot\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\varphi_n(\alpha)d\alpha\right.$$

$$\left.-Y_0(2\sqrt{nx})\cdot\int_0^x J_0(2\sqrt{n\alpha})\cdot\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\varphi_n(\alpha)d\alpha\right\}.$$

Die Funktionen J_0 und Y_0 sind die Besselschen Funktionen nullter Ordnung erster und zweiter Art. Für diese bestehen aber die Ungleichungen[1]):

$$|J_0(z)|<\sqrt{\frac{2}{\pi z}},\qquad |Y_0(z)|<\sqrt{\frac{2}{\pi z}}.$$

Führt man diese Ungleichungen in die vorangehende Gleichung für $\varphi_n(x)$ ein und schätzt die Integrale mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung in derselben Weise ab, wie wir es bei dem Integrale $I(x)$ im 1. Teile (§ 16) durchgeführt haben, so gelangt man zu folgenden Ungleichungen:

$$\left|\int_0^x Y_0(2\sqrt{n\alpha})\cdot\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\varphi_n(\alpha)d\alpha\right|<\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\sqrt{X},$$

$$\left|\int_0^x J_0(2\sqrt{n\alpha})\cdot\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\varphi_n(\alpha)d\alpha\right|<\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\sqrt{X};$$

$$|\varphi_n(x)|<\frac{1}{\sqrt[4]{nx}}(1+2\sqrt{X}),$$

wobei $$X=\frac{1}{10}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}$$ ist.

Beschränken wir also x auf ein Intervall g_1, g_2, wo g_1 und g_2 irgend zwei Zahlen der Art sind, wie wir sie am Anfange des II. Kapitels definiert haben, so folgt:

[1]) Paul Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen, V. Abschnitt, Nr. 23, p. 99.

$$|\varphi_n(x)| < \frac{c}{\sqrt[4]{n}},$$

und hierbei bedeutet c eine von n unabhängige, feste Grösse.

Wegen dieser Ungleichung konvergiert die Reihe $\sum_{n}^{0,\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$ gleichmässig, wenn x und ξ ein beliebiges Intervall g_1, g_2 durchlaufen.

Dies war der zweite Teil der Voraussetzung (D).

Um zu zeigen, dass auch der erste Teil der Voraussetzung (D) sowie die Voraussetzungen (E) und (F) erfüllt sind, bilden wir den Ausdruck $\frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$: wir differenzieren die obige Gleichung für $\varphi_u(x)$ nach x und führen mit Hilfe der Gleichungen $J_0'(x) = -J_1(x)$ und $Y_0'(x) = -Y_1(x)$ die Besselschen Funktionen erster Ordnung ein. Die Integrale haben wir bereits abgeschätzt; die ausserhalb der Integrale in $\varphi_n'(x)$ und $\varphi_n(\xi)$ auftretenden Besselschen Funktionen nähern wir durch trigonometrische Funktionen mit Hilfe der folgenden Gleichungen an, welche sich leicht aus den bei Schafheitlin, l. c., II. Abschnitt, Nr. 14, bewiesenen Gleichungen (2), (6), (6a), (7), (7a) herleiten lassen:

$$J_0(z) = \frac{\sin z + \cos z}{\sqrt{\pi z}} + \frac{f_1(z)}{z^{\frac{3}{2}}}, \qquad Y_0(z) = \frac{\cos z - \sin z}{\sqrt{\pi z}} + \frac{f_1(z)}{z^{\frac{3}{2}}},$$

$$J_1(z) = \frac{\sin z - \cos z}{\sqrt{\pi z}} + \frac{f_2(z)}{z^{\frac{3}{2}}}, \qquad Y_1(z) = \frac{\cos z + \sin z}{\sqrt{\pi z}} + \frac{f_2(z)}{z^{\frac{3}{2}}},$$

wobei

$$|f_1(z)| < c_1 + \frac{c_2}{z} + \frac{c_3}{z^2},$$

$$|f_2(z) < c_4 + \frac{c_5}{z} + \frac{c_6}{z^2} \qquad \text{ist.}$$

Die Grössen c_1 bis c_6 bedeuten positive Konstante.

Wir bekommen so für die Grösse $\frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$ die folgende Darstellung:

$$\frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n} = -\frac{1}{2\pi\sqrt[4]{x^3\xi}} \frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{\xi}-\sqrt{x}) + \cos 2\sqrt{n}(\sqrt{\xi}+\sqrt{x})}{n}(1-\varepsilon_n)$$

$$+ \frac{\psi}{n\sqrt[4]{n}};$$

hierbei ist $\varepsilon_n = \frac{1}{n+1}$, also $\varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$ und $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, und ψ ist wie im 1. Teile dieses Kapitels ein Symbol für gewisse Funktionen von x,ξ und n, welche in x und ξ stetig sind und für alle Werte von n dem absoluten Betrage nach unter einer von n unabhängigen, festen Grenze liegen, wenn x und ξ irgend ein Intervall g_1,g_2 durchlaufen.

Aus der Gleichung folgt, dass die Reihe $\sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2}$ für $g_1 \leqq x,\xi \leqq g_2$ gleichmässig konvergiert, womit auch der erste Teil der Voraussetzung (D) bewiesen ist.

Ferner werden durch sie die in den Voraussetzungen (E) und (F) auftretenden Reihen und Summen auf solche zurückgeführt, die wir bereits im 1. Teile des Kapitels in § 16 ausführlich behandelt haben. Die Untersuchung der endlichen oder unendlichen Summe $\sum \frac{\cos 2\sqrt{n}(\sqrt{\xi}+\sqrt{x})}{n}$ hat demselben Gedankengange zu folgen, wie die der Summe $\sum \frac{\sin z\sqrt{n}}{n}$.

Wir gelangen so zu folgenden Sätzen:

Die Reihe $\sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$ konvergiert gleichmässig, wenn x und ξ irgend ein Intervall g_1, g_2 durchlaufen und dabei $|x-\xi|$ über einer festen Grenze bleibt.

Die Reihe $\sum_n^{0,\infty} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$ konvergiert gleichmässig in jedem beliebigen Intervalle g_1, g_2.

Die Summen $\sum_{n}^{0,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$ und $\sum_{n}^{0,m} \frac{\varphi_n'(x)\varphi_n(x)}{\lambda_n}$ liegen für alle Werte von m zwischen endlichen, von m, x und ξ unabhängigen Grenzen, wenn x und ξ irgend ein Intervall g_1, g_2 durchlaufen und in der ersten Summe $|x-\xi|$ über einer festen Grenze bleibt.

Dies sind die Voraussetznngen (E) und (F).

Wir haben so alle Voraussetzungen (A) bis (F) auch bei den Laguerreschen Orthogonalfunktionen als erfüllt nachgewiesen.

Denken wir uns jetzt wieder x durch $-z$ ersetzt, wodurch sich an den angestellten Ueberlegungen inhaltlich nichts ändert, so erhalten wir auf Grund des allgemeinen Entwicklungssatzes des II. Kapitels folgendes Ergebnis:

Es sei $f(x)$ eine willkürliche, im Grundgebiete $-\infty,0$ definierte Funktion von x. Sie sei im ganzen Grundgebiete eine Funktion von beschränkter Schwankung, ausserdem aber sei sie vom Punkte $x = 0$ an eine beliebig kleine Strecke weit sowie unterhalb einer angebbaren Grenze mit ihren beiden ersten Ableitungen stetig; ferner verschwinde sie im Unendlichen, und das Quadrat der Funktion

$$p(x) = -\frac{d}{dx}(xf'(x)) + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right) f(x)$$

sei über das Grundgebiet integrabel. Dann gilt im ganzen Grundgebiete die Entwicklung

$$\sum_{n}^{0,\infty} \varphi_n(x) \int_{-\infty}^{0} f(\alpha)\varphi_n(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

wobei die $\varphi_n(x)$ die normierten Laguerreschen Orthogonalfunktionen bedeuten.

§ 20. Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen.

Die Eigenfunktionen $e^{-\frac{x}{2}} \cdot R_n(x) = e^{\frac{z}{2}} \cdot Q_n(z)$ bilden für $n = 0,1,2, \ldots$ ein vollständiges normiertes Ortogonalsystem des Kernes $K(x,\xi)$, den wir in § 18 definiert hatten.

Der Beweis dafür lässt sich vollkommen analog dem Beweise des entsprechenden Satzes im 1. Teile dieses Kapitels führen.

Lebenslauf.

Ich, Rudolf Neumann, evangelisch, bin geboren am 10. Februar 1888 in Reichenbach i. Schl. als Sohn des verstorbenen Oberlehrers Prof. Dr. Wilhelm Neumann und seiner Frau Elisabeth, geb. Macke. Von Ostern 1897 an besuchte ich das König-Wilhelms-Gymnasium zu Breslau und verliess es Ostern 1906 mit dem Zeugnis der Reife. Seitdem widme ich mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften an der Breslauer Universität; während des Sommersemesters 1907 studierte ich in München.

Ich besuchte die Vorlesungen und Uebungen der Herren Professoren und Dozenten:

Baumgartner, Freudenthal(†), Herz, Hintze, Hönigswald, Kabitz, Klaatsch, Kneser, Kühnemann, Kükenthal, Ladenburg(†), Landsberg, Lummer, Pax, Pringsheim, Rohde, Rosanes, Schaefer, Stern, Sturm, Zimmer in Breslau,

Giesenhagen, Goebel, Graetz, Grossmannn, Pauly(†), Voss in München.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern sage ich Dank für die Anleitung, die sie meinen Studien zuteil werden liessen; besonders aber danke ich Herrn Geheimrat Kneser für die reiche Förderung, die ich in seinen Vorlesungen und Seminaren genossen habe, sowie für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und das freundliche Interesse, das er derselben entgegenbrachte.